
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

UNIQUENESS FOR A MULTIDIMENSIONAL KERNEL DETERMINATION PROBLEM FROM A PARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

D. K. Durdiev¹, J. Z. Nuriddinov²

¹*Bukhara branch of the institute of mathematics named after V. I. Romanovskiy
at the academy of sciences of the Republic of Uzbekistan*

²*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

Annotation. We study two problems of determining the kernel of the integral terms in a parabolic integro-differential equation. In the first problem the kernel depends on time t and $x = (x_1, \dots, x_n)$ spatial variables in the multidimensional integro-differential equation of heat conduction. In the second problem the kernel it is determined from one dimensional integro-differential heat equation with a time-variable coefficient of thermal conductivity. In both cases it is supposed that the initial condition for this equation depends on a parameter

$y = (y_1, \dots, y_n)$ and the additional condition is given with respect to a solution of direct problem on the hyperplanes $x = y$. It is shown that if the unknown kernel has the form $k(x, t) = \sum_{i=0}^N a_i(x) b_i(t)$, then it can be uniquely determined.

Keywords: parabolic equation, Cauchy problem, integral equation, linearly independence, uniqueness.

Integro-differential equations play an important role in the mathematical modeling of many fields: physical, biological phenomena, engineering sciences and others areas where it is necessary to take into account the effect of a prehistory of process. Constitutive relations in the linear non-homogeneous diffusion and wave propagation processes with memory contain time- and space-dependent memory kernel. For many cases, in the practise these kernels are unknown functions. Problems of identification of memory kernels in parabolic and hyperbolic equations have been intensively studied starting at the end of the last century [1–7].

We study an inverse problem to determine a time and spatially varying kernel $k(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ in a parabolic integro-differential equations governing the heat flow in materials with memory.

Consider Cauchy problem for the n -dimensional parabolic integro-differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = \int_0^t k(x, t - \tau) u(x, y, \tau) d\tau, \quad (1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T],$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (2)$$

where Δ_x is Laplacian on the variables $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ is a parameter of problem, T is a fixed positive number.

In this paper we investigate the following problem: find a kernel $k(x, t)$ of the integral term in (1) if a solution to the Cauchy problem (1) and (2) is known on $x = y$ for all $y \in \mathbb{R}^n$ and $t \in [0, T]$:

$$u(y, y, t) = \psi(y, t), \quad \psi(y, 0) = \varphi(y, y). \quad (3)$$

Let $B^m(Q)$ be the class of m times continuously differentiable with respect to all variables and bounded together with all derivatives up to the order of m in the domain Q functions. When $m = 0$ this is usual space of continuous and bounded functions.

We assume that the function $k(x, t)$ with derivatives $k_{x_i x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, k_t belongs to $B(D_T)$, $D_T := \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T\}$ for any fixed $T > 0$, and the function $\varphi(x, y)$ is in $B^4(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

The main result of this work is the following uniqueness theorem.

Theorem. Suppose that the above mentioned assumptions about function $\varphi(x, y)$ are fulfilled. Besides, the function $\psi(y, t)$ together with derivatives ψ_t , ψ_{tt} and $\psi_{ty_i y_i}$, $i = 1, \dots, n$ belong to the class $B(D_T)$ for any fixed $T > 0$ and

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} |\psi(y, t)| = \mu(t) \geq \mu_0 > 0, \quad (4)$$

where μ_0 is a known numbers, then any function $k(x, t)$ having the form

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^N a_i(x) b_i(t), \quad a_i(x) \in B^2(\mathbb{R}^n), \quad b_i(t) \in C^1(\mathbb{R}), \quad (5)$$

is uniquely determined by the information (3) in domain D_T , where $C^1(\mathbb{R})$ is the class of continuously differentiable in $\mathbb{R}$ functions.

We note only natural necessary conditions which must satisfy the function $\psi(y, t)$. They are the second equalities of (3), (8) and

$$\Delta \psi_t(y, 0) - \psi_{tt}(y, 0) = \Delta_x \Delta_y \varphi(y, y) + 2 \sum_{i=1}^n \Delta_x \varphi_{x_i y_i} - k(y, 0) \varphi(y, y),$$

which follows from the equalities (12) and (13).

First of all we write the problem (1)–(3) with respect to the functions u_t , k . It follows from (1)–(3) the problem for these functions:

$$(u_t)_t - \Delta_x u_t = k(x, t) \varphi(x, y) + \int_0^t k(x, \tau) u_t(x, y, t - \tau) d\tau, \quad (6)$$

$$u_t(x, y, 0) = \Delta_x \varphi(x, y), \quad (7)$$

$$u_t(y, y, t) = \psi_t(y, t), \quad \psi_t(y, 0) = \Delta_x \varphi(y, y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

Here, the initial condition (7) was obtained from equality (1) by setting $t = 0$.

Further introduce the notations

$$\omega_i := u_{ty_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad v = 2 \operatorname{div}_x \omega + \operatorname{div}_y \omega.$$

Here and below, a variable in index of operators div , grad indicates that they apply in this variable.

Differentiating (6) and (7) with respect to y_i , we get the Cauchy problem for the determining of functions $\omega_i(x, y, t)$

$$(\omega_i)_t - \Delta_x (\omega_i) = k(x, t) \varphi_{y_i}(x, y) + \int_0^t k(x, \tau) \omega_i(x, y, t - \tau) d\tau, \quad t \in (0, T], \quad (9)$$

$$\omega_i(x, y, 0) = \Delta_x \varphi_{y_i}(x, y), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Applying by differential operators $2 \frac{\partial}{\partial x_i}$ and $\frac{\partial}{\partial y_i}$ to equation (9) alternately and summing the results with respect to i from $i = 1$ to $i = n$, taking into account the above introduced notation, we obtain the equation for function $v(x, y, t)$

$$\begin{aligned} v_t - \Delta_x v = k(x, t) \left[2 \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i y_i} + \Delta_y \varphi \right](x, y) + \int_0^t v(x, \tau) v(x, y, t - \tau) d\tau + \\ + 2 \operatorname{grad}_x k(x, t) \cdot \operatorname{grad}_y \varphi(x, y) + 2 \int_0^t \operatorname{grad}_x k(x, \tau) \cdot \omega(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

where $a \cdot b$ means the scalar product of vectors a and b . From (9) in this way, we get the initial condition

$$v(x, y, 0) = 2 \sum_{i=1}^n \Delta_x \varphi_{x_i y_i}(x, y) + \Delta_x \Delta_y \varphi(x, y). \quad (12)$$

It follows from (8) the relations

$$\begin{aligned}
\omega_i(y, y, t) &= \frac{\partial}{\partial y_i} u_t(y, y, t) = (u_{tx_i} + u_{ty_i})(y, y, t) = \psi_{ty_i}(y, t), \\
\omega_{ty_i}(y, y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} u_t(y, y, t) = \\
&= (u_{tx_i x_i} + 2u_{tx_i y_i} + u_{ty_i y_i})(y, y, t) = \psi_{ty_i y_i}(y, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \\
\operatorname{div}_y \omega(y, y, t) &= \left(\Delta_x u_t + 2 \sum_{i=1}^n u_{tx_i y_i} + \Delta_y u_t \right)(y, y, t) = \Delta_y \psi_t(y, t).
\end{aligned}$$

In view of the last equalities and (6), we note that the condition (3) in the term of function v can be written in the form

$$v(y, y, t) = \Delta_y \psi_t(y, t) - \psi_{tt}(y, t) + k(y, t) \varphi(y, y) + \int_0^t k(y, \tau) \psi_t(y, t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Note that at the found from (9) and (10) ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, the function v can be determined from the problem (11) and (12).

Lemma 1. For a solution $p(x, t)$ of problem

$$p_t - \Delta_x p = \int_0^t h(x, \tau) p(x, t - \tau) d\tau + f(x, t), \quad p|_{t=0} = \lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (14)$$

in the domain D_T take place the estimate

$$|p(x, t)| \leq \Phi e^{T\|h\|_T t} + \int_0^t F(\tau) e^{T\|h\|_T(t-\tau)} d\tau, \quad (15)$$

where $\|h\|_T := \max_{0 \leq t \leq T} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |h(x, t)|$, $\Phi := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\lambda(x)|$, $F(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x, t)|$.

Lemma 2. Let $k(x, t)$ has the form (5) and $K(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |k(x, t)|$. Then there exists a constant K_0 (generally speaking, different for each function k) so that the inequality

$$|k_{x_i}(x, t)| \leq K_0 K(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

is true.

The **proof** of this lemma is based on the assumption that the system of functions a_i , $i = 1, 2, \dots, N$ can be considered linearly independent in $\mathbb{R}^n$ (otherwise, one can rearrange the terms in (6), leaving only a linearly independent system of functions a_i). In fact, then there is $\beta > 0$ that $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^N c_j a_j(x) \right| \geq \beta$, if $\sum_{j=1}^N |c_j| = 1$. In view of this, we have

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |k(x, t)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{b_j(t)}{\sum_{l=1}^N |b_l(t)|} \right| \left| \sum_{l=1}^N |b_l(t)| \right| \geq \beta \sum_{l=1}^N |b_l(t)|.$$

At the same time, it follows from (1.5)

$$|k_{x_i}(x, t)| \leq \max_{1 \leq j \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a_{jx_i}(x)| \sum_{j=1}^N |b_j(t)|.$$

Matching the last two inequalities, we find

$$|k_{x_i}(x, t)| \leq K_0 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |k(x, t)| \leq K_0 K(t),$$

where

$$K_0 := \frac{1}{\beta} \max_{1 \leq j \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a_{jx_i}(x)|.$$

The theorem is proved using Lemma 1 and Lemma 2.

References

1. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in theory of materials with memory // *Nonlinear Anal. TMA.* 1988. – 12. – P. 411–423.
2. *Durdiev D. K.* An inverse problem for a three-dimensional wave equation in the medium with memory // *Math. Anal. And Disc. math., Novosibirsk, NGU.* – 1989. – P. 19–26. (in Russian).
3. *Grasselli M.* An identification problem for a linear integro-differential equation occurring in heat flow // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1992 – 15. – P. 167–186.
4. *Durdiev D. K.* To the question of correctness of one inverse problem for hyperbolic integro-differential equation // *Siberian Math. J.* – 1992. – V. 33. – P. 69–77.
5. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* – 2007. – V. 3, No. 4. – P. 411–423.
6. *Durdiev D. K.* A multidimensional inverse problem for an equation with memory // *Siberian Math. J.* – 1994. – V. 35, No. 3. – P. 514–521.
7. *Durdiev D. K.* Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // *Diff. Equ.* – 2008. – V. 44, No. 7. – P. 893–899.

MEMORY KERNEL RECONSTRUCTION PROBLEMS IN THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF RIGID HEAT CONDUCTOR

D. K. Durdiev¹, Zh. Zh. Zhumaev²

¹*Bukhara branch of the institute of mathematics named after V. I. Romanovskiy
at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan*

²*Bukhara State University*

Annotation. The inverse problems of determining the energy-temperature relation $\alpha(t)$ and the heat conduction relation $k(t)$ functions in the one-dimensional integro-differential heat equation are investigated. The direct problem is the initial-boundary problem for this equation. The integral terms have the time convolution form of unknown kernels and direct problem solution. As additional information for solving inverse problems, the solution of the direct problem for $x = x_0$ is given. At the beginning an auxiliary problem, which is equivalent to the original problem is introduced. Then the auxiliary problem is reduced to an equivalent closed system of Volterra-type integral equations with respect to unknown functions. Applying the method of contraction mappings to this system in the continuous class of functions with weighted norms, we prove the main result of the article, which is a global existence and uniqueness theorem of inverse problem solutions.

Keywords: integro-differential equation, thermal memory, initial-boundary problem, inverse problem, Green function.

In [2] Miller studied existence, uniqueness, and continuous dependence on parameters for solutions of the certain initial-boundary value problem for following system of integro-differential equations:

$$\begin{aligned} e(t, x) &= e_0 + \alpha(0)\theta(t, x) + \int_0^t \alpha'(t-\tau)\theta(\tau, x)d\tau, \\ q(t, x) &= -k(0)\theta_x(t, x) - \int_0^t k'(t-\tau)\theta_x(\tau, x)d\tau, \\ e_t(t, x) &= -q_x(t, x) + r(t, x), \end{aligned} \quad (1)$$

where $0 \leq t < \infty$, $x \in (0; l)$, $e_t = (\partial / \partial t)e$, $q_x = (\partial / \partial x)q$. In (1) $\alpha(t)$ and $k(t)$ are relaxation functions of internal energy and heat flow, respectively. The first and second equalities in equations (1) are linearized (with respect to certain constant e_0 energy) constitutive equations for internal energy and heat flow, respectively. And the third relation in (1) expresses the fundamental law of thermal conductivity — Fourier's law. For $k(0) = 0$ these equations represent the linearized theory for heat flow in a rigid, isotropic, homogeneous material as proposed by Gurtin and Pipkin (see e.g., [1], [3]). For $k(0) > 0$ the equations represent an alternate linearized theory proposed by Coleman and Gurtin [4]. For the direct problem consisting in determining the distribution of heat from some initial-boundary value problem for equation (1) Grabmueller [5] gave a very general uniqueness proof for generalized solutions in a Sobolev space and proved existence theorems in certain special situations.

It is supposed the rigid body will occupy a fixed open interval $(0, l)$ (one dimensional case). The energy-temperature relation function $\alpha(t)$ and the heat conduction relation $k(t)$ are both assumed sufficiently continuously differentiable functions.

From (1) it follows that

$$\begin{aligned} \theta_t(t, x) &= -\frac{\alpha'(0)}{\alpha(0)}\theta(t, x) + \frac{k(0)}{\alpha(0)}\theta_{xx}(t, x) + \\ &+ \int_0^t \left[\frac{k'(t-\tau)}{\alpha(0)}\theta_{xx}(\tau, x) - \frac{\alpha''(t-\tau)}{\alpha(0)}\theta(\tau, x) \right] d\tau + \frac{r(t, x)}{\alpha(0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Let $k(0) > 0$ and $\alpha(0) \neq 0$. Rewrite the equation (2) in the compact form:

$$\theta_t(t, x) = f(t, x) + C\theta_{xx}(t, x) - a(0)\theta(t, x) + \int_0^t [Cb(t-\tau)\theta_{xx}(\tau, x) - a'(t-\tau)\theta(\tau, x)]d\tau \quad (3)$$

for all $t \geq 0$, $x \in (0; l)$ and consider the initial-boundary value problem with

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \quad (4)$$

$$\theta(t, 0) = \mu_1(t); \theta(t, l) = \mu_2(t); \theta_0(0) = \mu_1(0); \theta_0(l) = \mu_2(0); \quad (5)$$

the initial and boundary conditions, where

$$C = \frac{k(0)}{\alpha(0)}, \quad a(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)}, \quad b(t) = \frac{k'(t)}{k(0)}, \quad f(t, x) = \frac{r(t, x)}{\alpha(0)}.$$

In equalities (4) and (5) $\theta_0(x)$, $\mu_1(t)$ and $\mu_2(t)$ are given functions. If $r(t, x)$, θ_0 , $\alpha(t)$, $k(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ are given functions, then finding the function $\theta(t, x)$ from (3)–(5) is called as a direct problem.

We pose the inverse problems:

Inverse problem 1. For given functions $r(t, x)$, $\theta_0(x)$, $k(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ it is required to determine the function $\alpha(t)$, $t > 0$ of the integral term in (3) using additional information about the solution of the direct problem (3)–(5):

$$\theta|_{x=x_0} = \psi(t), \quad x_0 \in (0, l), \quad t > 0 \quad (6)$$

In this case $\psi(t)$, $t > 0$ are assumed to be given functions.

Inverse problem 2. For given functions $r(t, x)$, $\theta_0(x)$, $\alpha(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ it is required to determine the function $k(t)$, $t > 0$ of the integral term in (3) using additional information (6) on the solution of the direct problem (3)–(5).

Since the method for studying the inverse problems allow to find simultaneously the solution to the inverse problem and the solution to the direct problem, then in the sequel, we will call the inverse problem 1 as a problem of determining functions $\theta(t, x)$, $\alpha(t)$ from equations (3)–(6). Let $C^m(0; l)$ be the class of m times continuously differentiable with all derivatives up to the m -th order (inclusive) in $(0; l)$ functions. In the case $m = 0$ this space coincides with the class of continuous functions. $C^{m,k}(D_T)$ is the class of m times continuously differentiable with respect to t and k times continuously differentiable with respect to x all derivatives in the domain D_T functions.

We need the following assertion:

Lemma (see [2]). Suppose $\alpha(0) > 0$, $\alpha \in C^3[0, T]$, $k \in C^2[0, T]$, $T > 0$ is an arbitrary fixed number, are true with $k(0) > 0$. Then equation (1) is equivalent to the following integrodifferential equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = F(t, x) + C\Delta\theta(t, x) + y(0)\theta(t, x) + \int_0^t y'(t-\tau)\theta(\tau, x)d\tau, \quad (7)$$

where F is defined as

$$F(t, x) = f(t, x) - \int_0^t D(t-\tau)f(\tau, x)d\tau + D(t)\theta(0, x),$$

and where $D(t)$ and $y(t)$ satisfy the scalar equations

$$D(t) = b(t) - \int_0^t b(t-\tau)D(\tau)d\tau, \quad (8)$$

$$y(t) = b(t) - a(t) - \int_0^t b(t-\tau)y(\tau)d\tau. \quad (9)$$

If $b(t)$ function is continuously for $t > 0$ then the solution to the integral equations (8) exists and unique. Note that for given equation (9) it can be considered to be an integral Volterra equation of the second kind with respect to $y(t)$ with the kernel $b(t)$,

$$y(t) = -\int_0^t b(t-\tau)y(\tau)d\tau + [b(t) - a(t)]. \quad (10)$$

It follows from the general theory of integral equations (see, e.g., [6, p.39–44]) that the solution of this equation is expressed by the formula

$$y(t) = b(t) - a(t) + \int_0^t R(t-\tau)[b(\tau) - a(\tau)]d\tau, \quad (11)$$

where the kernels $R(t)$ and $b(t)$ are related by

$$b(t) = -R(t) - \int_0^t R(t-\tau)b(\tau)d\tau. \quad (12)$$

If $b(0)$ is a known number, from relation (12) we find $R(0) = -b(0)$.

Everywhere in this paper it is supposed $\alpha(0)$ and $k(0)$ are given numbers such that $\alpha(0) \neq 0$, $k(0) > 0$.

The solution of the initial-boundary problem (7), (4), (5) satisfies the integral equation ([7], pp. 200–221):

$$\begin{aligned} \theta(t, x) &= \Psi(t, x) + \int_0^t \int_0^l G(t-\tau, x, \xi) \left(y(0)\theta(\tau, \xi) + \int_0^\tau y'(\tau-\alpha)\theta(\alpha, \xi)d\alpha \right) d\xi d\tau = \\ &= \Psi(t, x) + \int_0^t \int_0^l G(t-\tau, x, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^l G(t-\tau, x, \xi) \int_0^\tau y(\alpha) \theta_\alpha(\tau-\alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int_0^l G(t, x, \xi) \theta_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(t-\tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{2\pi n}{l^2} [\mu_1(\tau) - (-1)^n \mu_2(\tau)] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) d\tau; \\ G(t-\tau, x, \xi) &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2(t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi an}{l}\xi\right) \sin\left(\frac{\pi an}{l}x\right) \end{aligned}$$

is the Green function of the initial-boundary problem for one-dimensional heat equation.

We differentiate the equation (13) with respect to t . Introducing the notation $\mathcal{G}(t, x) := \theta_t(t, x)$ and taking into account the following relations:

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(t, \xi, x) = \delta(x - \xi), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l G(t, x, \xi) \theta_0(\xi) d\xi = \theta_0(x),$$

where $\delta(\cdot)$ is the Dirac's delta function, we rewrite the result in the form

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, x) &= \Psi_t(t, x) + \theta_0(x)y(t) + \int_0^t y(\alpha)\mathcal{G}(t-\alpha, x)d\alpha + \\ &+ \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x, \xi) \int_0^\tau y(\alpha)\mathcal{G}(\tau-\alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Further, using the condition (6), we obtain:

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \Psi_t(t, x_0) + \theta_0(x_0)y(t) + \int_0^t y(\alpha)\mathcal{G}(t-\alpha, x_0)d\alpha + \\ &+ \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) \int_0^\tau y(\alpha)\mathcal{G}(\tau-\alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Next we write this equality as the integral equation of the second order with respect to unknown function $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{\theta_0(x_0)} [\Psi_t(t, x_0) - \psi'(t) + \int_0^t y(\alpha)\mathcal{G}(t-\alpha, x_0)d\alpha + \\ &+ \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) \int_0^\tau y(\alpha)\mathcal{G}(\tau-\alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau]. \end{aligned} \quad (15)$$

Replacing $t = 0$ in integral equation (15), the unknown function $y(0)$ is found as follows:

$$y(0) = \frac{\psi'(0) - \Psi_t(0, x_0)}{\theta_0(x_0)}.$$

In what follows we assume $\theta_0(x_0) \neq 0$.

Theorem 1 (existence and uniqueness). Assume the conditions $\theta_0(x) \in C(0, l)$, $\psi(t) \in C[0; T]$, $r(t, x) \in C(D_T)$, $\mu_i(t) \in C[0, T]$, $i = 1, 2$, $k(t) \in C^2[0, T]$, $\theta_0(0) = \psi(0)$, $\theta_0(x_0) \neq 0$, $\theta_0(0) = \mu_1(0)$, $\theta_0(l) = \mu_2(0)$ are hold. Then there exists sufficiently small number $T^* \in (0, T)$ that the solution to the integral equations (13), (14) in the class of functions $\mathcal{G}(t, x) \in C^{1,2}(D_{T^*})$, $y(t) \in C[0; T^*]$ exist and unique, where $D_{T^*} = \{(x, t) | x \in (0, l), t \in [0, T^*]\}$.

Applying the method of contraction mappings to this system in the continuous class of functions with weighted norms, we prove the main result of the work, which is a global existence and uniqueness theorem of inverse problem solution.

Having found the functions $\mathcal{G}(t, x)$ and $y(t)$, we determine the functions $\theta(t, x)$, $a(t)$ by integral equation (9):

$$a(t) = b(t) - y(t) - \int_0^t b(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

$$\theta(t, x) = \theta_0(x) + \int_0^t \mathcal{G}(\tau, x) d\tau.$$

With the known function $a(t)$, solving the differential equation $a(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(0)}$, we find the function $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha(0) \int_0^t a(\tau) d\tau$,

the solution of the inverse problem 1 (3)–(6).

The second part with the problem of finding $\theta(t, x)$ and $k(t)$ from equalities (3)–(6). According to Lemma 1, the equation (3) is equivalent to equation (7). The solution of the direct problem (7), (4), (5) is expressed in the form of integral equation (13). We rewrite this equation as follows:

$$\begin{aligned} \theta(t, x) = & \Phi(t, x) + \int_0^t \int_0^l G(t - \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G(t - \tau, x, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^l G(t - \tau, x, \xi) \int_0^\tau y(\alpha) \theta_\alpha(\tau - \alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) = & \int_0^l G(t, x, \xi) \theta_0(\xi) d\xi + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{2\pi n}{l^2} [\mu_1(\tau) - (-1)^n \mu_2(\tau)] e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) d\tau. \end{aligned}$$

Differentiating equation (16) in t , we use the equality (8) and notation $\mathcal{G}(t, x) := \theta_t(t, x)$. Then we have

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, x) = & \Phi_t(t, x) + f(t, x) - \int_0^t D(t - \tau) f(\tau, x) d\tau + b(t) \theta_0(x) - \theta_0(x) \int_0^t b(t - \tau) D(\tau) d\tau + \\ & + \theta_0(x) y(t) + \int_0^t y(\tau) \mathcal{G}(t - \tau, x) d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t - \tau, x, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^l G_t(t - \tau, x, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t - \tau, x, \xi) \int_0^\tau y(\alpha) \mathcal{G}(\tau - \alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

and we obtained the following equation using the additional condition (6):

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & \Phi_t(t, x_0) + f(t, x_0) - \int_0^t D(t - \tau) f(\tau, x_0) d\tau + b(t) \theta_0(x_0) - \theta_0(x_0) \int_0^t b(t - \tau) D(\tau) d\tau + \\ & + \theta_0(x_0) y(t) + \int_0^t y(\tau) \mathcal{G}(t - \tau, x_0) d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t - \tau, x_0, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^l G_t(t - \tau, x_0, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t - \tau, x_0, \xi) \int_0^\tau y(\alpha) \mathcal{G}(\tau - \alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau. \end{aligned}$$

From the above equation the unknown function $b(t)$ is found:

$$\begin{aligned} b(t) = & -\frac{1}{\theta_0(x_0)} \left[\Phi_t(t, x_0) + f(t, x_0) - \psi'(t) - \int_0^t D(t - \tau) f(\tau, x_0) d\tau - \right. \\ & \left. - \theta_0(x_0) \int_0^t b(t - \tau) D(\tau) d\tau + \theta_0(x_0) y(t) + \int_0^t y(\tau) \mathcal{G}(t - \tau, x_0) d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) F(\tau, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) \theta_0(\xi) y(\tau) d\xi d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^l G_t(t-\tau, x_0, \xi) \int_0^\tau y(\alpha) \mathcal{G}(\tau-\alpha, \xi) d\alpha d\xi d\tau \Big].
\end{aligned} \tag{18}$$

The existence and uniqueness of the solution of the system of closed integral equations (17) and (18) is proved by applying the principle of contraction mapping. Therefore, it is true the following assertion:

Theorem 2 (existence and uniqueness). Assume the conditions $\theta_0(x) \in C(0, l)$, $\psi(t) \in C[0; T]$, $r(t, x) \in C(D_T)$, $\mu_i(t) \in C[0, T]$, $i = 1, 2$, $\alpha(t) \in C^2[0, T]$, $\theta_0(0) = \psi(0)$, $\theta_0(x_0) \neq 0$, $\theta_0(0) = \mu_1(0)$, $\theta_0(l) = \mu_2(0)$ are hold. Then there exists sufficiently small number $T^* \in (0, T)$ that the solution to the integral equations (17), (18)

in the class of functions $\mathcal{G}(t, x) \in C^{1,2}(D_{T^*})$, $b(t) \in C[0; T^*]$ exist and unique, where $D_{T^*} = \{(x, t) \mid x \in (0, l), t \in [0, T^*]\}$.

From the found function $b(t)$, the unknown function $k(t)$ is determined as follows:

$$k(t) = k(0) + k(0) \int_0^t b(\tau) d\tau.$$

References

1. Gurtin M. E., Pipkin A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – 31. – P. 113–126.
2. Miller R. K. An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory // Journal of mathematical analysis and applications. – 1978. – 66. – P. 313–332.
3. Gurtin M. E. On the thermodynamics of materials with memory // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – 28. P. 40–50.
4. Coleman B. D., Gurtin M. E. Equipresence and constitutive equation for rigid heat conductors // Z. Angew. Math. Phys. – 1967. – 18. – P. 199–208.
5. Grabmueller H. Linear Theorie der Waermeleitung in Medium mit Gedaechnis; Existenz und Eindeutigkeit von Loesungen sum Inversen Problem // Technische Hochschule Darmstdadt. – Pre-print No. 226. – September 1975.
6. Kilbas A. A. Integral equations: course of lectures. – Minsk : BSU. – 2005. (In Russian)
7. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Equations of Mathematical Physics. – Moscow : Nauka, 1977. (In Russian)

OPTIMIZATION OF ONE ESSENTIALLY NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM

V. V. Nefedov, V. V. Tikhomirov, G. Yu. Gladyshev

Lomonosov Moscow State University

Annotation. The paper uses a variational approach to study the optimization and stability of one essentially nonlinear dynamic system. (see [1]) For many essentially nonlinear dynamical systems, (adequate) stability and optimization methods have not yet been developed. This is due to the fact that the classical Lyapunov method is not always applicable, even in those cases when the Lyapunov function is constructed. However, the implementation of the Lyapunov method poses difficulties of both a qualitative and a quantitative nature in studies of this dynamic system for stability.

In such cases, it is more convenient to apply the variational approach to the study of stability. It allows you to fairly accurately establish the necessary stability conditions for a substantially nonlinear system. The proposed method (see [2]) is based on a variational method for estimating the rate of change of the metric of the phase space of states of a perturbed system. The authors congratulate dear Shavkat Arifdzhonovich Alimov on his anniversary and wish him health and success in his scientific work.

Keywords: variational method, Lyapunov's method, stability study, nonlinear dynamic system, necessary stability conditions, partial derivatives.

1. Problem formulation

Consider the problem of studying the stability of fixed equilibrium points of an essentially nonlinear dynamical system

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(\mu_1 - (x_1^2 + 2 \cdot x_2^2)), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2(\mu_2 - (2 \cdot x_1^2 + x_2^2)), \quad (1)$$

where μ_1, μ_2 — fixed parameters, at that $\mu_i > 0, i = 1, 2$.

2. The content of the variation technique

The solution to problem (1) is based on the consideration of the «variational technique», which gives the necessary stability conditions. Moreover, the application of the direct Lyapunov method, based on obtaining sufficient stability conditions using the Lyapunov function, as noted above, is not always effective.

Let a semimetric $S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 x_k^2$ and a small number $\varepsilon > 0$ be given in the Euclidean space X of the phase variables x_1 and x_2 . We analyze the solutions of system (1) in a small neighborhood $S(x_1, x_2) < \varepsilon$.

Definition 1. The solution to system (1) is called ε — stable if there exists a small number $\varepsilon > 0$ and a time moment $t_1 \in (0, +\infty)$ such that for all $t > t_1$ the trajectory of the system $x(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$ does not go beyond the domain $S(x_1, x_2) < \varepsilon$.

Definition 2. The solution to system (1) is called asymptotically stable if, for any arbitrarily small positive number, the trajectory $x(t)$ monotonically tends to zero in the domain $S(x_1, x_2) < \varepsilon$ and reaches zero for $t < \infty$ (i. e., for $t \rightarrow \infty$). Moreover, this trajectory satisfies the condition

$$\dot{S} = (\nabla S, \dot{x}) \leq 0. \quad (2)$$

The following statement is true (see [2]):

Statement. In order for some (perturbed) solution of the dynamical system (1) to be ε — stable, it is necessary that the total time derivative $\dot{S}$ of the function $S(x_1, x_2)$, calculated by virtue of system (1) for

the perturbed solution reaches a maximum in the domain $S(x_1, x_2) < \varepsilon$, and in the case of monotonic asymptotic stability, the maximum was reached at zero.

Consequence. This statement implies, in particular, that the conditions

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} \leq 0; \quad \left[\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} < 0 \right]; \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

are necessary stability conditions [asymptotic stability] of the perturbation of the zero solution in the vicinity of a fixed equilibrium point.

3. Application of the variational method for studying stability for system (1)

Note that system (1) has 5 equilibrium positions, having the following form

$$(0, 0); (a, 0); (0, b), \text{ where } a = \pm\sqrt{\mu_1}, \quad b = \pm\sqrt{\mu_2}.$$

We carry out a study on the stability of each of these equilibrium positions

A) We first consider system (1) in a neighborhood of the zero equilibrium position, i.e. in the vicinity of the point (0,0).

Using the above method, we compose a function

$$\dot{S} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 = x_1^2 \cdot (\mu_1 - (x_1^2 + 2 \cdot x_2^2)) + x_2^2 \cdot (\mu_2 - (2 \cdot x_1^2 + x_2^2)). \quad (4)$$

We define the necessary stability conditions (3) for the first partial derivatives of the function $\dot{S}$.

We find the following necessary conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_1} &= 2x_1 \cdot (\mu_1 - 2 \cdot x_2^2) - 4x_1^3 - 4x_1 \cdot x_2^2 = 0 \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_2} &= -4 \cdot x_2 \cdot x_1^2 + 2x_2 \cdot (\mu_2 - 2 \cdot x_1^2) - 4 \cdot x_2^3 = 0. \end{aligned}$$

The necessary stability conditions (3) for the second partial derivative (with respect to the argument x_1) take the form:

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = 2 \cdot (\mu_1 - 2 \cdot x_2^2) - 12 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 = 2\mu_1 + \bar{o}(\rho^2) \geq 0,$$

Obviously, the necessary condition (3) is not satisfied, which means that the perturbed solution of the zero equilibrium position is not stable.

B) Now consider the equilibrium position $(a, 0)$, where $a = \pm\sqrt{\mu_1}$. In system (1), obviously, we need to make a replacement $x_1 = z_1 + a$, $x_2 = z_2$. As a result, we get the system

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \mu_1(z_1 + a) - (z_1 + a) \cdot [(z_1 + a)^2 + 2 \cdot z_2^2], \\ \dot{z}_2 = \mu_2 \cdot z_2 - z_2 \cdot [2 \cdot (z_1 + a)^2 + z_2^2]. \end{cases} \quad (5)$$

Given the variational principle, we compose a function

$$\dot{S} = z_1 \cdot \dot{z}_1 + z_2 \cdot \dot{z}_2 = z_1 \cdot (z_1 + a) \cdot [\mu_1 - (z_1 + a)^2 - 2 \cdot z_2^2] + z_2^2 \cdot [\mu_2 - 2 \cdot (z_1 + a)^2 - z_2^2].$$

Next, we calculate the necessary stability conditions for the perturbed solution of the zero equilibrium position of system (5) in accordance with (3) for the first partial derivatives of the function $\dot{S}$, which take the form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} &= (2 \cdot z_1 + a) \cdot (\mu_1 - 2 \cdot z_2^2) - (4 \cdot z_1 + a) \cdot (z_1 + a)^2 - 4 \cdot (z_1 + a) \cdot z_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} &= -4 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1 + a) + 2 \cdot z_2 \cdot (\mu_2 - 2 \cdot (z_1 + a)^2) - 4 \cdot z_2^3 = 0. \end{aligned}$$

For the second partial derivatives, the necessary stability conditions obviously take the following form:

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2 \cdot (\mu_1 - 2 \cdot z_2^2) - 4 \cdot z_2^2 - (z_1 + a) \cdot (12 \cdot z_1 + 6 \cdot a) = 2\mu_1 - 6a^2 + \bar{o}(\rho^2) = -4 \cdot \mu_1 + \bar{o}(\rho^2) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_2^2} = -4 \cdot z_1 \cdot (z_1 + a) + 2 \cdot (\mu_2 - 2 \cdot (z_1 + a)^2) - 12 \cdot z_2^2 = 2 \cdot (\mu_2 - 2 \cdot a^2) + \bar{o}(\rho) < 0.$$

Obviously, the last two inequalities are true if the inequalities $0 < \mu_2 < 2 \cdot \mu_1$, which means that in this case the perturbed solution of the dynamical system (1) asymptotically stable in the vicinity of the equilibrium position $(a, 0)$.

C) We now consider the problem of studying the stability of the equilibrium position $(0, b)$, where $b = \pm \sqrt{\mu_2}$. For this purpose, in system (1), we make the change of variables $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2 + b$.

As a result, we get the system

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 \cdot [\mu_1 - (z_1^2 + 2 \cdot (z_2 + b)^2)], \\ \dot{z}_2 = (z_2 + b) \cdot [\mu_2 - (2 \cdot z_1^2 + (z_2 + b)^2)]. \end{cases} \quad (6)$$

Using the variational technique, we compose the variational metric function

$$\dot{S} = z_1 \cdot \dot{z}_1 + z_2 \cdot \dot{z}_2 = z_1^2 \cdot [\mu_1 - (z_1^2 + 2 \cdot (z_2 + b)^2)] + z_2 \cdot (z_2 + b) \cdot [\mu_2 - (2 \cdot z_1^2 + (z_2 + b)^2)].$$

Next, we calculate the partial derivatives of this function with respect to each of the arguments and determine the necessary stability conditions in a neighborhood of the equilibrium position. We have

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} = 2 \cdot z_1 \cdot [\mu_1 - (2 \cdot (z_2 + b)^2)] - 4 \cdot z_1^3 - 2 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot (z_2 + b) = 0,$$

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} = -4 \cdot (z_2 + b) \cdot z_1^2 + (2 \cdot z_2 + b) \cdot (\mu_2 - 2 \cdot z_1^2) - (z_2 + b)^2 \cdot (4 \cdot z_2 + b) = 0.$$

It is easy to check that the last equations are valid at the point of the zero equilibrium position.

For the second partial derivatives of the function $\dot{S}$, the necessary stability conditions for the perturbed equilibrium position are obviously represented in the form

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2 \cdot [\mu_1 - (2 \cdot (z_2 + b)^2)] - 12 \cdot z_1^2 - 4 \cdot z_2 \cdot (z_2 + b) = 2 \cdot \mu_1 - 4 \cdot b^2 + \bar{o}(\rho) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_2^2} = -4 \cdot z_1^2 + 2 \cdot (\mu_2 - 2 \cdot z_1^2) - (z_2 + b) \cdot (12 \cdot z_2 + 6 \cdot b) = 2 \cdot \mu_2 - 6 \cdot b^2 + \bar{o}(\rho) < 0.$$

From the last two inequalities we conclude that the necessary stability condition is satisfied if the parameters are related by the relations $0 < \mu_1 < 2 \cdot \mu_2$.

Thus, the following holds

Theorem. System (1) has five equilibrium positions $(0, 0)$; $(a, 0)$; $(0, b)$, where $a = \pm \sqrt{\mu_1}$, $b = \pm \sqrt{\mu_2}$. The equilibrium position $(0, 0)$ is not stable. The necessary condition for the stability of the equilibrium position $(a, 0)$ is valid when the inequalities $0 < \mu_2 < 2 \cdot \mu_1$, otherwise it is not stable. The necessary condition for the stability of the equilibrium position $(0, b)$ is valid when the conditions $0 < \mu_1 < 2 \cdot \mu_2$ are fulfilled. Otherwise, it is not stable.

4. Conclusions

The results obtained allow us to draw the following conclusions. The variational method for studying the stability of essentially nonlinear dynamical systems is effective and is easily implemented in the study of essentially nonlinear dynamical systems, when classically methods cause difficulties.

In the case when the variational metric coincides with the Lyapunov function, the necessary conditions coincide with the sufficient ones, which allows a complete study of the problem. The proposed method makes it possible to find the sets of parameter values for which the system is not stable, as well as to determine the regions of dependence of the phase variables for which the given dynamical system is stable in the sense of Definitions 1 or 2.

References

1. *Братусь А. и др.* Динамические системы и модели в биологии. – Физматлит, 2009. – 400 с.
2. *Смольяков Э.* Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2019. – Т. 55, № 4.
3. *Четаев Н.* Некоторые задачи теории устойчивости. Работы по аналитической механике // М. АН СССР. – 1962.
4. *Тихомиров В. В., Исаев Р. Р.* Применение вариационного метода для исследования устойчивости системы Лотки — Вольтера (для 3 измерений) // Конференция. Тихоновские чтения. Москва, 26.10.2020 г. – МГУ им. М. В. Ломоносова.

APPLICATION OF THE VARIATIONAL METHOD FOR STUDYING STABILITY OF THE 3D LOTKA — VOLTERRA SYSTEM

V. V. Tikhomirov, R. R. Isaev

Lomonosov Moscow State University

Annotation. The paper investigates the stability of the Lotka — Volterra dynamic system “predator — two preys” with the help of variational method. This method is applicable for studying equilibrium stability non-linear dynamical systems of any kind and in any dimension. It approves its effectiveness even in cases where the use of the Lyapunov function causes great difficulties (for example, when solving tasks of large dimension). The proposed method is based on a variation method for estimating the rate of phase-state metric change for the perturbed system when the variable $t \rightarrow \infty$. The disadvantage of the variation method is the fact that this method provides only the necessary conditions of stability. However, its it forms the first step in studying the stability of non-linear dynamical systems of any kind and any dimension.

Keywords: variational method, research of stability, non-linear dynamic system, necessary conditions of stability, partial derivative, Jaconian matrix, eigenvalues.

1. Let us consider the problem of studying the stability of the equilibrium positions of the Lotka — Volterra dynamic system “predator — two preys” (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2 - x_3); \\ \dot{x}_2 = \gamma_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1) \\ \dot{x}_3 = \gamma_3 \cdot x_3 \cdot (\alpha - x_1). \end{cases} \quad (1)$$

Here α, γ_i , with $i = 1, 2, 3$ are constants (parameters of the system), functions $x_i = x_i(t)$ denote the amount of the predator (x_1) and preys (x_2, x_3).

System (1) has the following three equilibrium points $M_0(0, 0, 0)$, $M_1(1, 1, 0)$, $M_2(\alpha, 0, 1)$ respectively.

For studying equilibrium points we apply the method proposed in [2], which is based on checking necessary conditions of stability.

2. The main idea of variational method is to determine the the maximum rate of change of Euclidean metric. $S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 x_k^2$ in state-space, assuming that the solution sought does not leave $S(x) < \varepsilon$.

We analyse (1) in small neighbourhood $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$.

Definition 1. The solution of a system (1) is called ε — stable, if there exist $\varepsilon > 0$ and $t_1 \in (0, +\infty)$ such that for all $t > t_1$ the trajectory of the system $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ does not leave $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$.

Definition 2. Solution of a system (1) is called asymptotically stable, if for all $\varepsilon > 0$ the trajectory $x(t)$ monotonically tends to zero in $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$ and reaches zero when $t \leq \infty$ (i.e. $t \rightarrow \infty$). At the same time trajectory satisfies the condition (derivative due to the system (1)) $\dot{S} = (\nabla S, \dot{x}) \leq 0$.

The following statement holds true.

Statement 1. The fact that a given (perturbed) solution of dynamic system (1) is ε — stable, demands the following conditions are required:

1. Time derivative $\dot{S}$ of function $S(x_1, x_2, x_3)$ due to the system (1) for the perturbed solution reaches maximum inside $S(x_1, x_2, x_3) < \varepsilon$.

2. In case of monotonic asymptotic stability the maximum is reached on the zero solution

Corollary. This statement, in particular yields, that the conditions

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} \leq 0; \quad \left(\frac{\partial \dot{S}}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_i^2} < 0 \right); \quad i = 1, 2, 3$$

are necessary conditions for stability (asymptotically stability) of zero solution perturbation in the vicinity of equilibrium point.

3. Consider variational method for studying stability of system (1). Apply a variational method to equilibria at points M_0, M_1, M_2 .

For the singular point $M_0(0,0,0)$ construct the metric function:

$$\dot{S} = x_1 \cdot \dot{x}_1 + x_2 \cdot \dot{x}_2 + x_3 \cdot \dot{x}_3 = -\gamma_1 \cdot x_1^2 \cdot (1 - x_2 - x_3) + \gamma_2 \cdot x_2^2 \cdot (1 - x_1) + \gamma_3 \cdot x_3^2 \cdot (\alpha - x_1).$$

For the first partial derivatives of metric function $\dot{S}$ the necessary conditions of stability of perturbed solution in the vicinity of zero equilibrium positions are as follows:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_1} = -2 \cdot x_1 \cdot \gamma_1 \cdot (1 - x_2 - x_3) - \gamma_2 \cdot x_2^2 - \gamma_3 \cdot x_3^2 = 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_2} = \gamma_1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot \gamma_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1) = 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial x_3} = \gamma_1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot \gamma_3 \cdot x_3 \cdot (\alpha - x_1) = 0; \end{cases}$$

For second partial derivatives of metric function $\dot{S}(x_1, x_2, x_3)$ the necessary conditions for stability of perturbed solution in the vicinity of zero equilibrium positions are as follows:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_1^2} = -2 \cdot \gamma_1 \cdot (1 - x_2 - x_3) = -2 \cdot \gamma_1 + o(\rho) < 0 \Leftrightarrow \gamma_1 > 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_2^2} = 2 \cdot \gamma_2 \cdot (1 - x_1) = 2 \cdot \gamma_2 + o(\rho) < 0 \Leftrightarrow \gamma_2 < 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial x_3^2} = 2 \cdot \gamma_3 \cdot (\alpha - x_1) = 2 \cdot \alpha \cdot \gamma_3 + o(\rho) < 0 \Leftrightarrow \gamma_3 < 0. \end{cases}$$

Statement 2. If the zero solution of the system (1) is (asymptotically) **stable** in the vicinity of equilibrium positions $(0,0,0)$, then the following inequalities hold true: $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$, $\alpha \cdot \gamma_3 < 0$ (or $\Leftrightarrow \gamma_3 < 0$). In the other words, this solution **is not stable**, if at least one of the indicated inequalities is violated (that contradicts a condition $\gamma_i > 0$), therefore the perturbed solution of zero equilibrium positions **is not stable**.

4. In order to study the stability of equilibrium position at $M_1(1,1,0)$ we let: $x_1 = z_1 + 1$; $x_2 = z_2 + 1$; $x_3 = z_3$. Thus we obtain the following system:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\gamma_1 \cdot (z_1 + 1) \cdot (-z_2 - z_3); \\ \dot{z}_2 = -\gamma_2 \cdot z_1 \cdot (z_2 + 1); \\ \dot{z}_3 = \gamma_3 \cdot z_3 \cdot (\alpha - 1 - z_1), \end{cases} \quad (2)$$

For this system the point $(0,0,0)$ is an equilibrium point. Following variational method we construct the metric function:

$$\begin{aligned} \dot{S}(z_1, z_2, z_3) &= z_1 \cdot \dot{z}_1 + z_2 \cdot \dot{z}_2 + z_3 \cdot \dot{z}_3 = \\ &= \gamma_1 \cdot z_1 \cdot (z_1 + 1) \cdot (z_2 + 1) \cdot (z_2 + z_3) - \gamma_2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \gamma_3 \cdot z_3^2 \cdot (\alpha - 1 - z_1) \end{aligned}$$

Necessary conditions for stability of perturbed solution in the vicinity of zero equilibrium position $(0,0,0)$ of system (2) for the first partial derivatives of function $S(z_1, z_2, z_3)$ are as follows:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} = \gamma_1 \cdot (2 \cdot z_1 + 1) \cdot (z_2 + z_3) - \gamma_2 \cdot (z_2^2 + z_2) - \gamma_3 \cdot z_3^2 = 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + z_1) - \gamma_2 \cdot z_1 \cdot (2 \cdot z_2 + 1) = 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_3} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + z_1) + 2 \cdot \gamma_3 \cdot z_3 \cdot (\alpha - 1 - z_1) = 0; \end{cases}$$

Next we need to define necessary conditions for stability of perturbed solution for the second partial derivatives of function $\dot{S}(z_1, z_2, z_3)$ in the vicinity of zero equilibrium positions of system (2). These conditions are as follows:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2 \cdot \gamma_1 \cdot (z_2 + z_3) \leq 0; & \Leftrightarrow \gamma_1 < 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_2^2} = -2 \cdot \gamma_2 \cdot z_1 \leq 0; & \Leftrightarrow \gamma_2 > 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_3^2} = 2 \cdot \gamma_3 \cdot (\alpha - 1 - z_1) \leq 0; & \Leftrightarrow \gamma_3 \cdot (\alpha - 1) < 0 (\gamma_3 > 0, \alpha < 1); \end{cases}$$

Statement 3. Perturbed solution in the vicinity of equilibrium positions $(1, 1, 0)$ of system (1) (or, which is also the same, zero equilibrium positions of system (2)) **is necessarily stable**, if the following conditions hold true:

$$\gamma_1 < 0; \gamma_2 > 0; \gamma_3 \cdot (\alpha - 1) < 0 \text{ (or } \gamma_3 > 0, \alpha < 1).$$

In the other words, if at least one of these conditions is violated, the specified solution **is not stable**.

5. In order to study the stability of equilibrium position of the point $M_2(\alpha, 0, 1)$ of system (1), we let: $x_1 = z_1 + \alpha$; $x_2 = z_2$; $x_3 = z_3 + 1$.

Now the equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$ becomes the zero equilibrium position of the following:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \gamma_1 \cdot (z_1 + \alpha) \cdot (z_2 + z_3); \\ \dot{z}_2 = \gamma_2 \cdot z_2 \cdot (1 - \alpha - z_1); \\ \dot{z}_3 = -\gamma_3 \cdot z_1 \cdot (1 + z_3); \end{cases} \quad (3)$$

Following the variational method we get the following metric function:

$$\dot{S}(z_1, z_2, z_3) = \gamma_1 \cdot z_1 \cdot (z_1 + \alpha) \cdot (z_2 + z_3) + \gamma_2 \cdot z_2^2 \cdot (1 - \alpha - z_1) - \gamma_3 \cdot z_1 \cdot z_3 \cdot (1 + z_3).$$

Necessary conditions of stability of disturbed solution of zero equilibrium position of system (3) (and therefore equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$ of system (1)) for first partial derivatives of metric function $\dot{S}(z_1, z_2, z_3)$ are the following:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_1} = \gamma_1 \cdot (2 \cdot z_1 + \alpha) \cdot (z_2 + z_3) - \gamma_2 \cdot z_2^2 - \gamma_3 \cdot (z_3 + z_3^2) = 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_2} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + \alpha \cdot z_1) + 2 \cdot \gamma_2 \cdot z_2 \cdot (1 - \alpha - z_1) = 0; \\ \frac{\partial \dot{S}}{\partial z_3} = \gamma_1 \cdot (z_1^2 + \alpha \cdot z_1) - \gamma_3 \cdot z_1 \cdot (2 \cdot z_3 + 1) = 0. \end{cases}$$

Necessary conditions of stability of disturbed solution for second partial derivatives of metric function $\dot{S}(z_1, z_2, z_3)$ are the following:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_1^2} = 2 \cdot \gamma_1 \cdot (z_2 + z_3) \leq 0; & \Leftrightarrow \gamma_1 < 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_2^2} = 2 \cdot \gamma_2 \cdot (1 - \alpha - z_1) \leq 0; & \Leftrightarrow \gamma_2 \cdot (1 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow (\gamma_2 > 0, \alpha < 1); \\ \frac{\partial^2 \dot{S}}{\partial z_3^2} = -2 \cdot \gamma_3 \cdot z_1 \leq 0; & \Leftrightarrow \gamma_3 > 0. \end{cases}$$

Hence we come to the following statement:

Statement 4. Perturbed solution in the vicinity of equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$ of system (1) ((or, which is also the same, zero equilibrium positions of system (3)) **is necessarily stable**, if the following conditions hold true:

$$\gamma_1 < 0; \gamma_2 \cdot (1 - \alpha) < 0; \text{ (or } \gamma_2 > 0, \alpha < 1); \gamma_3 > 0.$$

In the other words, if at least one of these conditions is violated then the specified solution **is not stable**.

6. Thus, the paper proposes a variation method for studying the stability of the equilibrium positions of Lotka — Volterra system(1). This study shows that the variational tool is an effective method of optimization for essentially non-linear dynamical systems also. In particular, this method could be effectively applied to dynamic systems of large dimension.

It is shown that this method allows us to formulate the necessary stability conditions of the perturbed solution for each of the three equilibrium positions and for all of incoming parameters.

At the same time, we found necessary conditions of stability of disturbed solution for each equilibrium position and for each incoming parameters, that is studying in researching optimization of solutions in systems. The following theorem is obtained

Theorem. The necessary conditions of stability for bifurcation points of system (1) are:

1. For **stability** of equilibrium position of $M_0(0, 0, 0)$:

$$\gamma_1 > 0; \gamma_2 < 0; \alpha \cdot \gamma_3 < 0 \text{ (or } \gamma_3 < 0).$$

2. For **stability** of equilibrium position of $M_1(1, 1, 0)$:

$$\gamma_1 < 0; \gamma_2 > 0; \gamma_3 \cdot (\alpha - 1) < 0 \text{ (or } \gamma_3 > 0, \alpha < 1).$$

3. For **stability** of equilibrium position of $M_2(\alpha, 0, 1)$:

$$\gamma_1 < 0; \gamma_2 \cdot (1 - \alpha) > 0; \text{ (or } \gamma_2 < 0, \alpha < 1); \gamma_3 > 0.$$

4. On the other hand, if at least one of the above conditions is not true, then perturbed solution in neighbourhood of the respective equilibrium position equilibrium positions **is not stable**.

Remark. While proving the theorem, it was not assumed that the system parameters are strictly positive, as it is in the Lotka — Volterra model “predator — two preys”. Turning back to this model one can formulate the following result.

Corollary. If all the coefficients γ_i are positive, then all equilibrium positions M_i are not stable.

7. Let's compare our results with classical methods of finding stability by Lyapunov approach. Henceforth (for certainty) we will assume that all parameters $\gamma_i > 0$. We will consider the stability of the equilibrium positions with respect to the first approximation.

Then let $M_i(x_1, x_2, x_3)$, — be equilibrium positions (point of bifurcation) of system (1). To determine the nature of these points' stability, we introduce the Jacobian matrix.

$$J(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \cdot (1 - x_2 - x_3) & x_1 \cdot \gamma_1 & x_1 \cdot \gamma_1 \\ -\gamma_2 \cdot x_2 & \gamma_2 \cdot (1 - x_1) & 0 \\ -\gamma_3 \cdot x_3 & 0 & \gamma_3 \cdot (\alpha - x_1) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Characteristic determinant of this matrix at the point in $M_0(0,0,0)$

$$|J(M_0) - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} -(\gamma_1 + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \cdot \gamma_3 - \lambda \end{vmatrix}.$$

It has eigenvalues with different signs. $\lambda_1 = \alpha \cdot \gamma_3 > 0$; $\lambda_2 = \gamma_2 > 0$; $\gamma_3 = -\gamma_1 < 0$. Then we get a conclusion that zero equilibrium position $M_0(0,0,0)$ of system (1) **is not stable by Lyapunov**.

Let's consider the bifurcation point $M_1(1,1,0)$. At this point the characteristic matrix (4) equals:

$$J(M_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_1 \\ -\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \cdot (\alpha - 1) \end{bmatrix}.$$

Eigenvalues of matrix are: $\lambda_1 = (\alpha - 1) \cdot \gamma_3 < 0$ (if $\alpha < 1$), and two other are imaginary $\lambda_{2,3} = \pm i \cdot \sqrt{(\gamma_1 \cdot \gamma_2)}$, and $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) > 0$. In this case, the study on the first approximation cannot determine anything. Determining the nature of stability requires further research. The method that we propose solves this problem definitely: the equilibrium position is not stable.

Let's consider equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$ and determine the nature of its stability. Jaconian matrix in this point is:

$$J(M_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_2) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \cdot \gamma_1 & \alpha \cdot \gamma_1 \\ 0 & \gamma_2 \cdot (1 - \alpha) & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eigenvalues of this matrix are: real one $\lambda_1 = \gamma_2 \cdot (1 - \alpha) > 0$ and two imaginary $\lambda_{2,3} = \pm i \cdot \sqrt{\alpha \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_3)}$ bearing in mind that $(\gamma_1 \cdot \gamma_3) > 0$. In this case equilibrium position $M_2(\alpha, 0, 1)$, obviously, **is not stable**.

Acknowledgements

The authors thank A. S. Bratus for his attention to the work.

References

1. Братусь А. и др. Динамические системы и модели в биологии // Физматлит. – 2009. – 400 с.
2. Смольяков Э. Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. – 2019. – Т.55, № 4.
3. Четаев Н. Некоторые задачи теории устойчивости // Работы по аналитической механике. – М. АН СССР. – 1962.

**ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА СИСТЕМЕ ОТСЧЁТОВ
КВАДРАТИЧНЫМИ ЭКСПОНЕНТАМИ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К НЕКОТОРЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ**

Абдул Ахад Ариан, С. М. Ситник, А. С. Тимашов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. Рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса — квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений. Намечены возможные приложения этого метода к решению дифференциальных уравнений типа Больцмана — Максвелла — Власова.

Ключевые слова: интерполяция, функции Гаусса, узловые функции, тета-функции Якоби, уравнения типа Больцмана — Максвелла — Власова.

Развитие науки и техники приводит к появлению новых задач, для решения которых требуются современные методы и подходы как к вопросам теории, так и к практическим приложениям. Задачи исследования электрических и оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, моделирование процессов в томографии и медицине привели к поиску методов разложения функций по неполным, переполненным или неортогональным системам. До этого в течение долгого временного периода приближения осуществлялись в основном разложением по полным ортогональным системам. Примерами переполненных систем являются фреймы, а неортогональных — всплески, системы Габора (когерентные состояния), функции Рвачёвых, sinc — функции и другие. Уже само многообразие этих методов подтверждает тот очевидный факт, что среди них нет универсальных, эффективно работающих для всех или хотя бы для большинства задач. Поэтому для специальных классов задач разрабатываются различные методы, которые наиболее эффективны и не имеют ограничений именно для рассматриваемых задач.

Одним из современных подходов к решению задачи о восстановлении цифровых сигналов по их значениям на данной системе отсчетов является использование квадратичных экспонент, то есть разложений сигналов по целочисленным сдвигам функций Гаусса. Этот подход, основанный на использовании функций Гаусса, исторически возникал в нескольких известных задачах математики, физики и техники. На его основе в 19 веке Френелем было предложено решение задачи о корректном описании результатов опытов Фраунгофера по дифракции и объяснение дискретной природы спектра солнечных лучей. Гаусс использовал квадратичные экспоненты для вычисления знаменитых сумм, названных его именем, при помощи которых им были решены известные задачи теории чисел, суммы Гаусса до сих пор используются, например, в современной оптике и теории кодирования. В 20 веке на основе использования функций Гаусса была создана математическая модель голографии, за техническую реализацию которой Д. Габор получил Нобелевскую премию в 1971 г. В 21 веке другая Нобелевская премия была присуждена за разработку и применение компьютерного пакета Gaussian для моделирования процессов в квантовой физике, молекулярной химии, биологии, геномной инженерии и в других приложениях, основу математического обеспечения этого пакета составили комбинации разложений именно по квадратичным экспонентам — функциям Гаусса.

Данное направление исследований, основанное на использовании сдвигов функций Гаусса, развивали многие отечественные и зарубежные учёные, перечислим только некоторых из них: Журавлёв М. В., Киселёв Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Переломов А. М., Ситник С. М.,

Ушаков С. Н., Calcaterra C., Darlington S., Feichtinger G. H., Lanzara F., Lifshits M., Madrenas J., Maz'ya V., Schmidt G., Riemenschneider S.D., Seshadri V., Shclumprecht T., Sivakumar N.

Изучим задачу о приближении сигналов произвольной природы (электрических, информационных и т. д.) в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов.

Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$ и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, так же определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f(m) = \tilde{f}(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби. Как показано в [1], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2–3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений, см. также [4–5].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов (см. также [4–11]).

1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров q , σ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.

2. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров q , σ .

3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры.

4. Рассмотрены приложения разработанного метода к аналитическому и численному решению дифференциальных уравнений типа Больцмана-Максвелла-Власова.

Литература

1. Журавлёв М. В., Киселёв Е. А., Минин Л. А., Ситник С. М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных. – 2010. – С. 107–116.
2. Минин Л. А., Ситник С. М., Журавлев М. В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – 2009. – № 13 (68), 17/2. – С. 89–99.
3. Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. – 2011. – V. 173, No 2. – P. 231–241.
4. Ситник С. М., Тимашов А. С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2013. – № 19 (162), вып. 32. – С. 184–186.
5. Ситник С. М., Тимашов А. С., Ушаков С. Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2015. – № 17 (214), вып. 40. – С. 130–142.
6. Sitnik S. M., Timashov A. S., Ushakov S. N. On the Correctness of Finite-rank Approximations by Series of Shifted Gaussians // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Kazan, 2020. – V. 41, No 3. – P. 423–429.
7. Sitnik S. M., Timashov A. S., Ushakov S. N. Signal approximations by shifted Gaussians: a direct approach by finite linear systems // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – V. 1479, 012046.
8. Минин Л. А., Ситник С. М., Ушаков С. Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2014. – № 7 (183), вып. 35. – С. 214–217.
9. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Математические заметки. – 2014. – Том 96, вып. 2. – С. 239–250.
10. Ситник С. М., Тимашов, А. С. Вычислительные аспекты метода квадратичной экспоненциальной интерполяции в задачах теории сигналов. «Новые информационные технологии в автоматизированных системах». Материалы семнадцатого научно-практического семинара. – М. : Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2014. – С. 292–300.
11. Тимашов А. С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции / А. С. Тимашов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – Белгород, 2019. – № 4 (19), вып. 51. – С. 514–521.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Аннотация. В данной работе с помощью итерационного метода предлагается построение приближенного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, итерационный метод.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + \left(\int_0^1 x(s) ds \right)^3 = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (2)$$

Из результатов работы [1], в частности, следует, что рассматриваемая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение.

С помощью соответствующих итерационных схем было получено приближенное положительное решение задачи (1)–(2), приведенное в табл. 1.

Таблица 1

Положительное решение задачи (1)–(2)

<i>t</i>	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
<i>x</i>	0,00	0,38	0,67	0,87	1,00	1,04	1,00	0,87	0,67	0,38	0,00

После интерполирования табличных данных получен следующий график приближенного положительного решения задачи (1)–(2).

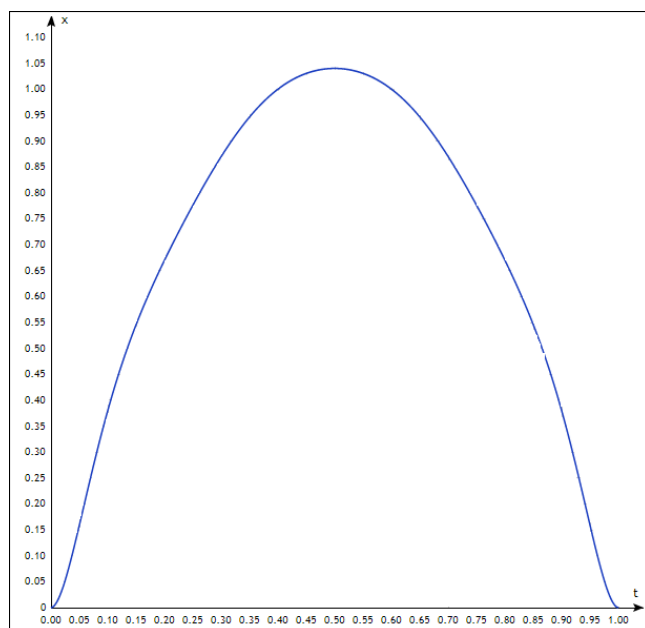


Рис. 1

Литература

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 77–80.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ТРАНСМИССИИ

Е. В. Астахова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача об упругости в материале, состоящем из двух слоев. На границе задано неоднородное условие типа трансмиссии. Построено решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям в смысле главного значения, и асимптотики по гладкости с выделением сингулярных составляющих вблизи границы.

Ключевые слова: задача сопряжения, асимптотики по гладкости, упругость, деформации.

Введение

Изучение свойств композитных материалов привело к постановке и изучению задач теплопроводности, упругости, термоупругости. Особый интерес среди них представляют задачи для материалов с трещинами. Из статей в этой области можно отметить работы, посвященные изучению задач для материалов с ограниченными трещинами (трещины ограниченной длины) [1–7]. В данной статье рассматривается математическая модель, описывающая распространение упругости в материалах с трещиной. Однако, в отличие от предыдущих статей, здесь рассматривается случай биматериала из двух слоев, заполняющих верхнюю и нижнюю полуплоскости.

1. Постановка задачи

Модель задана дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}(\kappa_i + 1) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1^2} + (\kappa_i - 1) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\ (\kappa_i - 1) \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1^2} + (\kappa_i + 1) \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

которые выполняются на каждой полуплоскости отдельно: верхняя полуплоскость моделируется уравнениями с индексом $i = 1$, нижняя – с индексом $i = 2$. Значения параметров κ_i и β_i характеризуют материал полуплоскости и, вообще говоря, различаются: $\kappa_1 \neq \kappa_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$

На границе, которая является осью абсцисс $l = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$, заданы граничные условия типа трансмиссии:

$$\begin{aligned}[U(x_1, x_2)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (U_1(x_1, \varepsilon) - U_2(x_1, -\varepsilon)) = Q_1(x_1), \\ [V(x_1, x_2)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (V_1(x_1, \varepsilon) - V_2(x_1, -\varepsilon)) = Q_2(x_1), \\ \left[\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}(x_1, \varepsilon) - \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(x_1, -\varepsilon) \right) = Q_3(x_1), \\ \left[\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}(x_1, \varepsilon) - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_1, -\varepsilon) \right) = Q_4(x_1).\end{aligned}\tag{2}$$

Определение 1. Решением краевой задачи (1)–(2) назовем вектор-функцию

$$U(x_1, x_2) = \begin{cases} U_1(x_1, x_2), & x_2 > 0 \\ U_2(x_1, x_2), & x_2 < 0 \end{cases}, \quad V(x_1, x_2) = \begin{cases} V_1(x_1, x_2), & x_2 > 0 \\ V_2(x_1, x_2), & x_2 < 0 \end{cases},$$

компоненты которой

- имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно по обоим пространственным переменным в любой точке $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus l$;
- удовлетворяют уравнениям (1);
- удовлетворяют граничным условиям (2) в смысле главного значения.

2. Решение задачи в образах Фурье

После применения преобразования Фурье по переменной s_1 , задача (1)–(2) приобретает следующий вид

$$-(\kappa+1)s_1^2 u + (\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2is_1 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

$$-(\kappa-1)s_1^2 v + (\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2is_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

$$[u(x_1, x_2)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_1(x_1, \varepsilon) - u_2(x_1, -\varepsilon)) = q_1(x_1),$$

$$[v(x_1, x_2)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v_1(x_1, \varepsilon) - v_2(x_1, -\varepsilon)) = q_2(x_1),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, \varepsilon) - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, -\varepsilon) \right) = q_3(x_1), \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, \varepsilon) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, -\varepsilon) \right) = q_4(x_1),$$

где $u_i(s_1, x_2) = F_{x_1 \rightarrow s_1} [U_i(x_1, x_2)]$, $v_i(s_1, x_2) = F_{x_1 \rightarrow s_1} [V_i(x_1, x_2)]$ и $q_i(s_1) = F_{x_1 \rightarrow s_1} [Q_i(x_1)]$.

Определение 2. Решением краевой задачи (3)–(4) назовем вектор-функцию

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2), & x_2 > 0 \\ u_2(x_1, x_2), & x_2 < 0 \end{cases}, \quad v(x_1, x_2) = \begin{cases} v_1(x_1, x_2), & x_2 > 0 \\ v_2(x_1, x_2), & x_2 < 0 \end{cases},$$

компоненты которой

- удовлетворяют уравнениям (3);
- удовлетворяют граничным условиям (4) в смысле главного значения;
- ограничены на бесконечности.

Теорема 1. Решение задачи (3)–(4), отвечающему Определению 2, будет иметь следующий вид

- для верхней полуплоскости

$$\begin{pmatrix} u_1(s_1, x_2) \\ v_1(s_1, x_2) \end{pmatrix} = \frac{e^{-|s_1|x_2}}{\Delta} \begin{pmatrix} -\frac{is_1}{|s_1|} \Delta_3 - \frac{\kappa_1}{|s_1|} \Delta_4 + \Delta_4 x_2 \\ \Delta_3 + \frac{is_1}{|s_1|} \Delta_4 x_2 \end{pmatrix}$$

– для нижней полуплоскости

$$\begin{pmatrix} u_2(s_1, x_2) \\ v_2(s_1, x_2) \end{pmatrix} = \frac{e^{|s_1|x_2}}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 + \frac{is_1}{|s_1|} \Delta_2 x_2 \\ -\frac{is_1}{|s_1|} \Delta_1 - \frac{\kappa_2}{|s_1|} \Delta_2 + \Delta_2 x_2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = 4|s_1|^2(\kappa_1\kappa_2 - 1)$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & |s_1|^2 q_1(s_1)(2 - 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 - \kappa_2) + is_1|s_1|q_2(s_1)(2 - \kappa_1 - \kappa_2) + \\ & + |s_1|q_3(s_1)(-2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) - is_1q_4(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2), \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = 2is_1|s_1|^2 q_1(s_1)(\kappa_1 + 1) + 2|s_1|^3 q_2(s_1)(\kappa_1 - 1) + 2is_1|s_1|q_3(s_1)(\kappa_1 - 1) + 2|s_1|^2 q_4(s_1)(\kappa_1 + 1),$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & -is_1|s_1|q_1(s_1)(2 + \kappa_1 + \kappa_2) + |s_1|^2 q_2(s_1)(-2 + 2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2) + \\ & + is_1q_3(s_1)(\kappa_2 - \kappa_1) - |s_1|q_4(s_1)(2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2), \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = -2|s_1|^3 q_1(s_1)(\kappa_2 + 1) + 2is_1|s_1|^2 q_2(s_1)(1 - \kappa_2) - 2|s_1|^2 q_3(s_1)(1 - \kappa_2) + 2is_1|s_1|q_4(s_1)(\kappa_2 + 1),$$

$$q_i(s_1) = F_{x_1 \rightarrow s_1} [Q_i(x_1)]$$

Таким образом, решением задачи (3)–(4) являются следующие функции:

$$\begin{aligned} u_1(s_1, x_2) = & \frac{e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(q_1(s_1)(-2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 - \kappa_2) + \frac{is_1}{|s_1|} q_2(s_1)(2 - \kappa_1 - \kappa_2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{|s_1|} q_3(s_1)(-2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) - \frac{i}{s_1} q_4(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) \right) + \\ & + \frac{2x_2 e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(-|s_1|q_1(s_1)(\kappa_2 + 1) + is_1q_2(s_1)(\kappa_2 - 1) + q_3(s_1)(\kappa_2 - 1) + \frac{is_1}{|s_1|} q_4(s_1)(\kappa_2 + 1) \right) \\ v_1(s_1, x_2) = & \frac{e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(-\frac{is_1}{|s_1|} q_1(s_1)(2 + \kappa_1 + \kappa_2) + q_2(s_1)(-2 + 2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2) - \right. \\ & \left. - i \frac{s_1}{|s_1|^2} q_3(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{1}{|s_1|} q_4(s_1)(2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) \right) + \\ & + \frac{2x_2 e^{-|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(-is_1q_1(s_1)(\kappa_2 + 1) + |s_1|q_2(s_1)(\kappa_2 - 1) + i \frac{s_1}{|s_1|} q_3(s_1)(\kappa_2 - 1) - q_4(s_1)(\kappa_2 + 1) \right) \\ u_2(s_1, x_2) = & \frac{e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(q_1(s_1)(2 - 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 - \kappa_2) + \frac{is_1}{|s_1|} q_2(s_1)(2 - \kappa_1 - \kappa_2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{|s_1|} q_3(s_1)(-2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) - \frac{i}{s_1} q_4(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) \right) + \\ & + \frac{2x_2 e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(-|s_1|q_1(s_1)(\kappa_1 + 1) + is_1q_2(s_1)(\kappa_1 - 1) - q_3(s_1)(\kappa_1 - 1) + \frac{is_1}{|s_1|} q_4(s_1)(\kappa_1 + 1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2(s_1, x_2) = & \frac{e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(-\frac{is_1}{|s_1|} q_1(s_1)(2 + \kappa_1 + \kappa_2) + q_2(s_1)(2 - 2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2) - \right. \\
& \left. -i\frac{s_1}{|s_1|^2} q_3(s_1)(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{1}{|s_1|} q_4(s_1)(2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2) \right) + \\
& + \frac{2x_2 e^{|s_1|x_2}}{4(\kappa_1\kappa_2 - 1)} \left(is_1 q_1(s_1)(\kappa_1 + 1) + |s_1| q_2(s_1)(\kappa_1 - 1) + i\frac{s_1}{|s_1|} q_3(s_1)(\kappa_1 - 1) + q_4(s_1)(\kappa_1 + 1) \right)
\end{aligned}$$

3. Существование и асимптотика решения

Теорема 2. Если $Q_i(x_1)$ $i = \{1; 2; 3; 4\}$ – такая функция, что:

1. $Q_i(x_1) \in C^4$;
2. $Q_i(x_1)$ – финитная с носителем $[-A; A]$;
3. Существует постоянная M такая, что $|Q_i^{(n)}(x_1)| \leq M$ для любого $x_1 \in [-A; A]$, $n = \{0; 1; 2; 3; 4\}$;
4. $\int_{-A}^A Q(x_1) dx_1 = 0$,

то преобразы Фурье решения задачи (3)–(4) будут существовать, удовлетворять дифференциальным уравнениям (1) и граничным условиям (2).

Теорема 3. Если $Q_i(x_1)$ $i = \{1; 2; 3; 4\}$ – такая функция, что:

1. $Q_i(x_1) \in C^4$;
2. $Q_i(x_1)$ – финитная с носителем $[-A; A]$;
3. Существует постоянная M такая, что $|Q_i^{(k)}(x_1)| \leq M$ для любого $x_1 \in [-A; A]$, $k = \{0; 1; \dots; 4\}$;
4. $\int_{-A}^A Q(x_1) dx_1 = 0$,

то преобразы Фурье решения задачи (3)–(4) являются решением задачи (1)–(2) по Определению 2 и имеют следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned}
U_1(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{\kappa_1\kappa_2 - 1} \left((\kappa_2 + 1) \frac{(x_1 - y_1) Q_1(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A + (\kappa_2 - 1) \frac{|x_2| Q_2(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A \right) + R_1^1(x_1, x_2), \\
V_1(x_1, x_2) &= \frac{-x_2}{\kappa_1\kappa_2 - 1} \left((\kappa_2 + 1) \frac{|x_2| Q_1(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A + (\kappa_2 - 1) \frac{(x_1 - y_1) Q_2(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A \right) + R_1^2(x_1, x_2), \\
U_2(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{\kappa_1\kappa_2 - 1} \left((\kappa_1 + 1) \frac{(x_1 - y_1) Q_1(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A + (\kappa_1 - 1) \frac{|x_2| Q_2(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A \right) + R_2^1(x_1, x_2), \\
V_2(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{\kappa_1\kappa_2 - 1} \left((\kappa_1 + 1) \frac{|x_2| Q_1(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A - (\kappa_1 - 1) \frac{(x_1 - y_1) Q_2(y_1)}{x_2^2 + (x_1 - y_1)^2} \Big|_{y_1=-A}^A \right) + R_2^2(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

где $R_m^n(x_1, x_2)$ – непрерывные на $\mathbb{R}^2$ функции.

Выводы

Для задачи упругости с граничными условиями типа трансмиссии (1)–(2) было построено решение в образах Фурье (Теорема 1). Далее было доказано существование обратного преобразования Фурье от полученных функций при выполнении некоторых условий и построены асимптотики вблизи границы с выделением сингулярных составляющих компонент решения.

Литература

1. *El-Borgi S.* A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // *International Journal of Engineering Science*. – 2004. – № 42. – С. 371–393.
2. Глушко А. В. Асимптотическое поведение производных решения задачи упругих деформаций неоднородного материала под воздействием механических нагрузок / А.В. Глушко, Е. А. Логинова, С. В. Пронина // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика*. – Воронеж, 2017. – № 4. – С. 70–87.
3. Астахова Е. В. Влияние тепла на деформации материала с дефектом / Е. В. Астахова, А. В. Глушко, Е. А. Логинова // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – Москва, 2019. – 59:9. – С. 1532–1536.
4. Глушко А. В. О стационарном распределении тепла в двух связанных полуплоскостях с трещиной на границе / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика*. – Воронеж, 2015. – № 1. – С. 111–134.
5. Черникова А. С. Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины / А. С. Черникова // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика*. – Воронеж, 2015. – № 1. – С. 188–206.
6. Глушко А. В. Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 1 / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // *Журнал вычислительной математики и математической физики* – Москва, 2019 – 59:6 – С.1007–1023.
7. Глушко А. В. Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 2 / А. В. Глушко, А. С. Рябенко, А. С. Черникова // *Журнал вычислительной математики и математической физики* – Москва, 2019 – 59:7 – С. 1230–1242.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНЫМ ЯДРОМ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

С. Н. Асхабов

*Чеченский государственный педагогический университет,
Чеченский государственный университет*

Аннотация. В статье получены точные априорные оценки решения интегрального уравнения с суммарным ядром, степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Используя эти оценки, методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения данного уравнения в конусе неотрицательных непрерывных на положительной полуоси функций. Установлено, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений в полном метрическом пространстве, порожденном априорными оценками. Приведена оценка скорости сходимости последовательных приближений к точному решению. Приведен пример, показывающий неулучшаемость априорных оценок.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, суммарное ядро, априорные оценки, метод весовых метрик.

1. Введение

Среди линейных интегральных уравнений с суммарным ядром хорошо известно уравнение Фокса, решение которого в замкнутой форме с помощью преобразования Фурье приведено в монографии Е. Титчмарша [1, п. 11.15]. Известно [2, § 7], что уравнения с суммарным ядром после применения преобразования Фурье приводят к так называемым краевым задачам со сдвигом, а в некоторых частных случаях заменой переменных они сводятся к линейным интегральным уравнениям типа свертки. Как отмечено в работе [3], линейные интегральные уравнения с суммарным ядром, в отличие от соответствующих уравнений с разностным ядром, изучены сравнительно мало. Что касается нелинейных интегральных уравнений с суммарным ядром, то они также тесно связаны с соответствующими уравнениями типа свертки и их теория в настоящее время находится в стадии становления. Известно [4, § 20], что исследование нелинейных интегральных уравнений типа свертки с симметричными переменными пределами интегрирования приводит к суммарным ядрам и системам нелинейных вольтерровских уравнений типа свертки, возникающим при решении некоторых задач гидроаэродинамики, популяционной генетики и других (подробнее, см. [4–6]). При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные решения таких уравнений. В этой связи, рассмотрим в классе

$$Q_+ = \{u(x) : u(x) \in C[0, \infty] \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$$

нелинейное интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = \int_0^x k(x+t)u(t)dt + f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

в котором ядро $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют условиям:

$$k(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } \int_0^\delta k(t)dt > 0 \text{ для любого } \delta > 0, \quad (2)$$

$$f(x) \in C[0, \infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0, \infty) \text{ и } f(0) \geq 0. \quad (3)$$

Цель данной работы получить в классе Q_+ точные априорные оценки решения уравнения (1) и методом весовых метрик [4, § 17] доказать, что это уравнение имеет единственное решение, а также показать, что его можно найти методом последовательных приближений и установить оценку скорости их сходимости.

2. Априорные оценки решения

При доказательстве основных результатов оказываются весьма полезными следующие две простые леммы.

Лемма 1. Если $a(x)$ и $b(x)$ неотрицательные неубывающие на $[0, \infty)$ функции, то

$$\int_0^x a(x+t) \cdot b(t) dt \leq \int_0^x [2a(2t) - a(t)] \cdot b(t) dt. \quad (4)$$

Лемма 2. Если функция $a(x)$ локально интегрируема на $[0, \infty)$, то

$$\int_0^x a(x+t) dt = \int_0^x [2a(2t) - a(t)] dt. \quad (5)$$

Следующая теорема дает существенную в дальнейшем информацию о возможных решениях уравнения (1) в конусе Q_+ .

Теорема 1. Если выполнены условия (2), (3) и функция $u(x) \in Q_+$ является решением уравнения (1), то $u(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{aligned} F_+(x) &\equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(2t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(0) \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \\ &\leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(x+t) dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv G_+(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что если $k(x) = C_1 > 0$ и $f(x) = C_2 \geq 0$, то нижняя и верхняя априорные оценки совпадают, т. е.

$$F_+(x) \equiv G_+(x) \equiv \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot C_1 \cdot x + C_2^{(\alpha-1)/\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)},$$

и являются решением интегрального уравнения (1). Значит, в определенном смысле, неравенства (6) неулучшаемы.

3. Теорема существования и единственности

Запишем уравнение (1) в операторном виде:

$$u = T_+ u, \quad \text{где} \quad (T_+ u)(x) = \left(\int_0^x k(x+t) \cdot u(t) dt + f(x) \right)^{1/\alpha}.$$

Из теоремы 1 следует, что решение уравнения $u = T_+ u$ естественно разыскивать в классе

$$P^+ = \{u(x) : u(x) \in C[0, \infty) \text{ и } F_+(x) \leq u(x) \leq G_+(x)\},$$

где функции $F_+(x)$ и $G_+(x)$ определены в (6).

Далее будем предполагать, что неоднородность $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$, т. е. представима в виде:

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (7)$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия (2), (3) и (7). Тогда оператор T_+ переводит класс P^+ в себя.

Зафиксируем любое число $b > 0$ и рассмотрим класс:

$$P_b^+ = \{u(x) : u(x) \in C[0, b] \text{ и } F_+(x) \leq u(x) \leq G_+(x)\}.$$

Из леммы 3 непосредственно вытекает следующее

Следствие 1. Если выполнены условия (2), (3) и (7), то оператор T_+ отображает класс P_b^+ в себя.

Введем теперь в классе P_b^+ метрику, положив для любых $u, v \in P_b^+$

$$\rho_b^+(u, v) = \sup_{0 < x \leq b} \frac{|u(x) - v(x)|}{G_+(x)}. \quad (8)$$

Корректность этой метрики проверяется так же как и в пункте 17.7 [4]. Заметим, что в отличие от §§ 17–19 [4], в данной метрике в качестве весовой функции используется не нижняя, а верхняя априорная оценка решения уравнения (1). Точно так же как и при доказательстве теоремы 17.13 [4] проверяется, что пара (P_b^+, ρ_b^+) образует полное метрическое пространство.

Если дополнительно предположить, что функции $k(x)$, $f(x)$ и показатель α удовлетворяют условию:

$$q = \sup_{0 < x \leq b} \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x k(x+t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{(\alpha-1) \int_0^x k(2t)dt + \alpha \cdot f^{(\alpha-1)/\alpha}(0)} < 1, \quad (9)$$

то для любых $u, v \in P_b^+$ выполняется неравенство

$$\rho_b^+(T_+u, T_+v) \leq q \cdot \rho_b^+(u, v),$$

т. е. оператор T_+ является сжимающим.

Таким образом, в силу принципа сжимающих отображений, справедлива

Теорема 2. Если $\alpha > 1$ и выполнены условия (2), (3), (7), (9), то уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x)$ в метрическом пространстве P_b^+ (и в Q_+). Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n = T_+u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (8). При этом справедлива оценка скорости сходимости:

$$\rho_b^+(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho_b^+(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $q < 1$ определено в условии (9), а $u_0(x) \in P_b^+$ есть начальное приближение (произвольная функция).

В заключение отметим, что следуя работам [7–9], где изучаются различные классы нелинейных дискретных уравнений с разностными ядрами, можно исследовать соответствующие нелинейные дискретные уравнения с суммарными ядрами в различных пространствах числовых последовательностей.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611 (проект «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи»).

Литература

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – Москва – Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 479 с.
2. Гахов Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – Москва : Наука, 1978. – 296 с.
3. Антипов В. Г. Особое интегральное уравнение с суммарным ядром / В. Г. Антипов // Изв. вузов. Матем. – 1959. – № 6. – С. 9–13.
4. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свертки / С. Н. Асхабов. – Москва : Физматлит, 2009. – 304 с.
5. Okrasinski W. On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation / W. Okrasinski // Annal. Polon. Math. – 1980. – V. 37, № 3. – P. 223–229.
6. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications / W. Okrasinski // Extracta Math. – 1989. – V. 4, № 2. – P. 51–74.
7. Асхабов С. Н. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью / С. Н. Асхабов, Н. К. Карапетянц // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1777–1784.
8. Askhabov S. N. Convolution type discrete equations with monotonous nonlinearity in complex spaces / S. N. Askhabov, N. K. Karapetian // Journal of Integral Equations and Math. Phys. – 1992. – V. 1, № 1. – P. 44–66.
9. Асхабов С. Н. Дискретные уравнения типа свертки с монотонной нелинейностью в комплексных пространствах / С. Н. Асхабов, Н. К. Карапетянц // Докл. АН. – 1992. – Т. 322, № 6. – С. 1015–1018.

ОБ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. С. Афанасова¹, В. В. Обуховский¹, Г. Г. Петросян²

¹Воронежский государственный педагогический университет

²Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. Рассматривается обобщенная краевая задача для управляемой системы с обратной связью, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением дробного порядка с бесконечным запаздыванием в сепарабельном банаховом пространстве. Строится и изучается разрешающий мультиоператор, на основе свойств которого формулируется общий принцип существования решений задачи в терминах отклонения от нуля топологической степени соответствующего векторного поля. Приводится конкретный пример реализации этого общего принципа, а также пример существования оптимального решения поставленной задачи, минимизирующего заданный полунепрерывный сверху функционал качества.

Ключевые слова: система управления с обратной связью, оптимальное решение, дробное дифференциальное включение, бесконечное запаздывание, мера некомпактности, уплотняющий оператор, неподвижная точка, топологическая степень.

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь в последнее время интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см., например, монографии [18, 22] статьи [16, 17, 21] и др.).

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J. K. Hale и J. Kato (см. [13, 14]). Пространство $\mathcal{B}$ будем рассматривать как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty, 0]$ со значениями в банаховом пространстве E , наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Для любой функции $x: (-\infty, a] \rightarrow E$, где $a > 0$, и каждого $t \in (-\infty, a]$, x_t представляет собой функцию из $(-\infty, 0]$ в E , заданную как

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-\infty, 0].$$

Будем предполагать, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(B1) Если функция $x: (-\infty; a] \rightarrow E$ непрерывна на $[0, a]$ и $x_0 \in \mathcal{B}$, то для любого $t \in [0, a]$ выполнено

(i) $x_t \in \mathcal{B}$;

(ii) функция $t \rightarrow x_t$ непрерывна;

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\| + M(t) \|x_0\|_{\mathcal{B}}$, где функции $K, M: [0, \infty) \rightarrow [0; \infty)$ не зависят от x , K строго положительна и непрерывна, а M локально ограничена.

(B0) Существует $l > 0$ такое, что $\|\psi(0)\|_E \leq l \|\psi\|_{\mathcal{B}}$ для всех $\psi \in \mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty, 0]$ в E с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ (см. [14], Предложение 1.2.1).

Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие.

(BC1) Если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно, то $\psi \in \mathcal{B}$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$.

(BC2) Если $\psi \in BC$ и $\|\psi\|_{BC} \neq 0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \neq 0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство BC , наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ является нормированным пространством. Мы будем обозначать его BC .

Пусть E – сепарабельное банахово пространство. Обозначим символом $\mathcal{C}$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x : (-\infty; a] \rightarrow E$ наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_B + \|x|_{[0,a]}\|_{\mathcal{C}},$$

где последняя норма – обычная sup-норма пространства $C([0, a]; E)$.

Мы будем рассматривать следующую управляемую систему, описываемую полулинейным функционально-дифференциальным включением с бесконечным запаздыванием в E :

$${}^c D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t) + Bu(t), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

удовлетворяющую условию обратной связи

$$u \in \Psi x. \quad (2)$$

Здесь символом ${}^c D^q$ обозначена дробная производная Гerasимова-Капуто порядка $0 < q < 1$; $D(A) \subset E \rightarrow E$ – замкнутый линейный оператор; $F : [0, a] \times \mathcal{BC} \rightarrow Kv(E)$ – мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями; u – непрерывная функция действующая из $[0, a]$ в банахово пространство управлений E ; $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow K(C([0, a]; E_1))$ – мультиотображение обратной связи; $B : E_1 \rightarrow E$ – ограниченный линейный оператор.

Рассмотрим задачу о существовании траекторий указанной системы, удовлетворяющих следующему общему граничному условию:

$$Qx \in Sx, \quad (3)$$

где $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{BC}$ – линейный ограниченный оператор; $S : \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathcal{BC})$ – J^c -мультиотображение.

Предположим, что выполнено следующее условие.

(A) Линейный оператор $A : D(A) \rightarrow E$ порождает ограниченную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}$, $t \geq 0$ линейных операторов в E . Обозначим $M = \sup\{\|T(t)\|; t \geq 0\}$.

Предположим, что мультиотображение $F : [0, a] \times \mathcal{BC} \rightarrow Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям.

(F1) для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot, \psi) : [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

(F2) для п.в. $t \in [0, a]$, мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{BC} \rightarrow Kv(E)$ п.н.св;

(F3) для любого $r > 0$, существует функция $\alpha_r \in L^p_+[0, a]$ такая, что для $\|\psi\|_B \leq r$ выполнено

$$\|F(t, \psi)\|_E \leq \alpha_r(t)$$

для п.в. $t \in [0, a]$;

(F4) существует функция $\mu \in L^p([0, a])$ такая, что для каждого непустого ограниченного $Q \subset \mathcal{BC}$ выполнено:

$$\chi_E(F(t, Q)) \leq \mu(t) \varphi_{\mathcal{BC}}(Q) \text{ п.в. } t \in [0, a],$$

где χ_E – МНК Хаусдорфа в E , $\varphi_{\mathcal{BC}}(Q)$ – модуль послойной некомпактности множества Q .

Относительно мультиотображения Ψ будем предполагать, что

(Ψ) естественно определенное мультиотображение

$$B\Psi : \mathcal{C} \rightarrow K(C([0, a]; E))$$

является J^c -мультиотображением.

Определение 1. Пара функций $x \in \mathcal{C}$ и $C([0, a]; E_1)$ образуют интегральное решение системы (1)–(3) если функция x удовлетворяет включению (2) и имеет вид

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1} T(t-s)[f(s) + Bu(s)]ds, \quad (4)$$

где $f(s) \in F(s, x_s)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta, \quad T(t) = q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) T(t^q \theta) d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+,$$

а функция u удовлетворяет включению (2). Функция x называется траекторией системы, а функция u – соответствующим управлением.

Рассмотрим линейный оператор $G: L^p([0, a]; E) \rightarrow C$, заданный следующим образом

$$(Gf)(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds, & t \in [0, a] \\ 0, & t \in (-\infty, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим C_0 подпространство C , состоящее из функций, имеющих вид

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0), \quad t \in [0, a]$$

и обозначим $\mathcal{Q}_0$ сужение $\mathcal{Q}$ на C_0 .

Основным требованием на граничные операторы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ будет следующее условие:

(QS) существует непрерывный линейный оператор $\Lambda: \mathcal{BC} \rightarrow C_0$ такой, что

$$(I - \mathcal{Q}_0 \Lambda)(z - \mathcal{Q}G(f + Bu)) = 0$$

для всех $x \in C$, $z \in \mathcal{S}(x)$, $f \in F(s, x_s)$ и $u \in \Psi(x)$.

В предположении, что выполнено условие (QS), рассмотрим мультиоператор

$$\Theta: C \rightarrow Kv(C).$$

Основное свойство мультиоператора Θ описывается следующим утверждением.

Теорема 1. Каждая неподвижная точка мультиоператора Θ , то есть функция $x(\cdot)$ удовлетворяющая соотношению

$$x = \Lambda z + (I - \Lambda \mathcal{Q})G(f + Bu) \quad (6)$$

для некоторых $z \in \mathcal{S}(x)$, $f \in F(s, x_s)$ и $u \in \Psi(x)$ вместе с функцией u образуют интегральное решение задачи (1)–(3).

Обратно, при выполнении условия $(\tilde{Q})$, если x и u – траектория и соответствующее управление для задачи (1)–(3), то функция x удовлетворяет (6) для $z = \mathcal{Q}x \in \mathcal{S}(x)$ и $f \in F(s, x_s)$.

Исследуются условия, при которых мультиоператор Θ является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности в данном функциональном пространстве. Свойства этого мультиоператора дают возможность применить теорию топологической степени.

Мы можем сформулировать следующий общий принцип существования интегральных решений задачи (1)–(3).

Теорема 2. При указанных выше условиях, пусть ограниченное открытое множество $\Omega \subset C$ не имеет траекторий $x(\cdot)$ задачи (1)–(3) на границе $\partial\Omega$ и пусть

$$\deg(i - \Theta, \overline{\Omega}) \neq 0.$$

Тогда множество интегральных решений $\{x, u\}$ задачи (1)–(3) непусто.

В качестве примера применения этого принципа рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 3. При указанных выше условиях предположим дополнительно, что

(H1) найдется последовательность функций $\omega_n \in L_+^p(0; a)$, $n = 1, 2, \dots$ такая, что:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\omega_n\|_2 = 0; \quad \text{и} \quad \sup_{\|x\| \leq n} \|F(t, x)\| \leq \omega_n(t) \text{ для п.в. } t \in (0; a),$$

(H2) выполнены следующие асимптотические условия:

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|\mathcal{S}(x)\|}{\|x\|} = \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|B\Psi(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Тогда множество интегральных решений задачи (1)–(3) непусто.

В случае, когда мультиотображения F , $\mathcal{S}$ и $B\Psi$ глобально ограничены, получаем следующий оптимизационный результат.

Теорема 4. Пусть выполнено условие $(\tilde{Q})$, также существует функция $\omega \in L_+^p(0, a)$ и константы $s > 0$, $b > 0$ такие, что

- (1) для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ выполнено $\|F(t, \psi)\|_E \leq \omega(t)$ для п.в. $t \in (0, a)$;
- (2) для любого $x \in \mathcal{C}$ выполнено $\|\mathcal{S}(x)\|_B \leq s$;
- (3) $\|B\Psi(x)\|_{C([0, a]; E)} \leq b$.

Тогда существует траектория x_* и соответствующее управление u_* задачи (1)–(3) такие, что

$$\phi(x_*) = \inf\{\phi(x) : x \in \Sigma\},$$

где Σ обозначает множество всех траекторий задачи (1)–(3) и ϕ заданный полунепрерывный снизу функционал на пространстве $\mathcal{C}$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

Литература

1. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений. Успехи мат. наук. – 1980. – 35(1). – С. 59–126.
2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. – Москва : Книжный дом «Либроком», 2011.
3. Борсук К. Теория ретрактов. – Москва : Мир, 1971.
4. Мышкис А. Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории. Матем. Сборник. – 1954. – 34. – С. 525–540.
5. Anh C. T., Ke T. D. On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces. Fixed Point Theory. – 2014. – 15(2). – P. 373–392.
6. Arutyunov A. V., Obukhovskii V. Convex and Set-Valued Analysis. Selected Topics, De Gruyter Graduate, De Gruyter, Berlin. 2017.
7. Bader R., Kryszewski W. Fixed-point index for compositions of set-valued maps with proximally 1-connected values on arbitrary ANR's. Set-Valued Anal. – 1994. – 2. – P. 459–480.
8. Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. Multivalued linear operators and differential inclusions in Banach spaces. Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. – 2003. – 23. P. 53–74.
9. Baskakov A., Obukhovskii V., Zecca P. On solutions of differential inclusions in homogeneous spaces of functions. J. Math. Anal. Appl. – 2006. – 324 (2). – P. 1310–1323.
10. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On noncompact fractional order differential inclusions with generalized boundary condition and impulses in a Banach space. J. Funct. Spaces. 2015, Art. ID 651359, 10 pp.
11. Ding Z., Kartsatos A. G. Nonresonance problems for differential inclusions in separable Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – 124. – P. 2357–2365.
12. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Second edition. Topological Fixed Point Theory and Its Applications, vol. 4. Springer, Dordrecht. 2006

13. Hale J. K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay. Funkc. Ekvac. – 1978. – Vol. 21. – P. 11–41.
14. Hino Y., Murakami S., Naito T. Functional Differential Equations with Infinite Delay. Lecture Notes in Mathematics. Berlin; Heidelberg; New York : Springer-Verlag, 1991.
15. Hyman D. H. On decreasing sequences of compact absolute retracts. Fund Math. – 1969. – 64. – P. 91–97.
16. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 7, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2001.
17. Ke T. D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays. Appl. Anal. – 2013. – 92 (1). – P. 115–137.
18. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
19. Mallet-Paret J., Nussbaum R. D. Asymptotic fixed point theory and the beer barrel theorem. J. Fixed Point Theory Appl. – 2008. – 4. – P. 203–245.
20. Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley, Inc., New York, 1993.
21. Obukhovskii V. V. Semilinear functional-differential inclusions in a Banach space and controlled parabolic systems. Soviet J. Automat. Inform. Sci. – 1991. – 24. – P. 71–79.
22. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
23. Zhang Z., Liu B. Existence of mild solutions for fractional evolution equations. Fixed Point Theory. – 2014. – 15 (1). – P. 325–334.
24. Zhou Y. Fractional Evolution Equations and Inclusions: Analysis and Control. Elsevier Academic Press, London, 2016.

РЕЗУЛЬТАТЫ О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ, КОМПАКТНЫМИ И НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Е. С. Барановский

Воронежский государственный университет

Аннотация. Получены новые результаты о разрешимости нелинейных операторных уравнений с монотонными, компактными и некомпактными операторами. На основе этих результатов установлено существование слабых решений в модели неизотермического течения несжимаемой жидкости с учетом вязкой диссипации энергии.

Ключевые слова: нелинейные операторные уравнения, монотонные операторы, компактные операторы, неизотермическое течение, вязкая диссипация энергии, слабые решения, теорема существования.

Исследование математических моделей, описывающих сложные физические процессы, часто сводится к решению систем нелинейных уравнений и неравенств, содержащих монотонные и компактные операторы. К настоящему времени разработаны эффективные и разнообразные методы решения таких задач (см., например, [1, 2] и цитируемую там литературу). Однако в приложениях иногда возникают системы уравнений с некомпактными возмущениями монотонных операторов. Это относится, например, к моделям неизотермических течений жидкостей с учетом вязкой диссипации энергии [3, 4]. В рамках доклада будут обсуждаться различные подходы к изучению таких уравнений. В качестве основного результата получена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть V — равномерно выпуклое сепарабельное банахово пространство, W — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Предположим, что выполнены следующие условия.

- (i) Операторы $M_1 : V \rightarrow V^*$ и $M_2 : W \rightarrow W^*$ являются непрерывными и монотонными и для любых $v \in V$ и $w \in W$, $w \neq 0$, выполнены следующие соотношения:

$$\langle M_1(v), v \rangle_{V^* \times V} = \mu(\|v\|_V), \quad \langle M_2(w), w \rangle_{W^* \times W} > 0,$$

где $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ — непрерывная взаимно-однозначная функция.

- (ii) Операторы $K_1 : V \times W \rightarrow V^*$ и $K_2 : V \times W \rightarrow W^*$ являются вполне непрерывными, т. е. для любых последовательностей $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset V$ и $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset W$ таких, что $v_n \rightarrow v_0$ в пространстве V и $w_n \rightarrow w_0$ в пространстве W при $n \rightarrow \infty$, имеем, что $K_1(v_n, w_n) \rightarrow K_1(v_0, w_0)$ в V^* и $K_2(v_n, w_n) \rightarrow K_2(v_0, w_0)$ в W^* при $n \rightarrow \infty$.

- (iii) Оператор $N : V \rightarrow W^*$ непрерывен и ограничен.

- (iv) Множество $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \Sigma_\lambda$ ограничено в пространстве $V \times W$, где Σ_λ обозначает множество пар $(v, w) \in V \times W$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \langle M_1(v), v \rangle_{V^* \times V} + \lambda \langle K_1(v, w), v \rangle_{V^* \times V} = 0, \\ \langle M_2(w), w \rangle_{W^* \times W} + \lambda \langle K_2(v, w), w \rangle_{W^* \times W} + \lambda \langle N(v), w \rangle_{W^* \times W} = 0. \end{cases}$$

Тогда следующая система уравнений

$$\begin{cases} M_1(v) + K_1(v, w) = 0, \\ M_2(w) + K_2(v, w) + N(v) = 0 \end{cases}$$

имеет по крайней мере одно решение в пространстве $V \times W$.

Приведем один пример использования сформулированной выше теоремы в задачах гидродинамики.

Рассмотрим модель стационарного неизоэтермического течения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} - \operatorname{div}[\nu |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^{p-2} \mathbf{D}(\mathbf{u})] + \nabla \pi = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \operatorname{div}[k |\nabla \theta|^{q-2} \nabla \theta] = \nu |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^p + \omega \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad k |\nabla \theta|^{q-2} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = -\beta \theta \text{ на } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

где $\mathbf{u}$ — скорость течения; $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций; θ — температура; $\mathbf{f}$ — внешние массовые силы, действующие на жидкость; π — давление, ω — интенсивность внешних тепловых источников; $\nu > 0$ — коэффициент вязкости; $k > 0$ — коэффициент теплопроводности; $\beta > 0$ — коэффициент теплообмена на стенках сосуда Ω ; p и q — заданные параметры; $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

С помощью теоремы 1 получен следующий результат.

Теорема 2. *Предположим, что:*

- вектор-функция $\mathbf{f}(\cdot, y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ измерима для любого $y \in \mathbb{R}$;
- вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ непрерывна для п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$;
- существует функция $f_0 \in L_2(\Omega)$ такая, что для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$ справедлива оценка $|\mathbf{f}(\mathbf{x}, y)| \leq f_0(\mathbf{x})$;
- выполнено включение $\omega \in L_2(\Omega)$;
- выполнены неравенства: $p \geq 2$ и $q > d$.

Тогда задача (A) имеет по крайней мере одно слабое решение $(\mathbf{u}, \theta) \in W_p^1(\Omega)^d \times W_q^1(\Omega)$.

Литература

1. Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part II/B: Nonlinear Monotone Operators. – New York : Springer Science+Business Media, 1990.
2. Papageorgiou N. S., Rădulescu V. D., Repovš D. D. Nonlinear Analysis — Theory and Methods. – Cham : Springer, 2019.
3. Consiglieri L., Rodrigues J. F., Shilkin T. On the Navier — Stokes equations with energy-dependent nonlocal viscosities // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – Vol. 130, No 4. – P. 4814–4826.
4. Feireisl E., Novotný A. Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids, 2nd ed. – Cham : Birkhäuser, 2017.

ПАССИВНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ ТРАНСПОРТА НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМОВ ТОРМОЗНЫХ УЗЛОВ С УЧЕТОМ ТЕРМОСОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕПЛОРАСЕИВАНИЮ

В. П. Белокуров¹, С. В. Белокуров², А. А. Штепа¹, Р. А. Кораблев¹, Э. Н. Бусарин¹

¹Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

²Воронежский государственный университет инженерных технологий

Аннотация. Статья затрагивает тему недооценки тепловых явлений тормозных узлов. Рассматривается тема контактных термических сопротивлений. Рассмотрен теплообмен между двумя «полуограниченными» телами. Приведены дифференциальные уравнения теплопроводности. Установлены граничные условия. Расчетные зависимости позволяют определить значения температурных перепадов и температур поверхностей в контактных парах с учетом контактных термических сопротивлений рассеиваемым тепловым потокам в тормозных узлах. Данные уточняющие расчеты применимы для улучшения теплоотвода из зон трения тормозных узлов, следствием чего является повышение пассивной безопасности транспорта.

Ключевые слова: пассивная безопасность, показатели, сопротивление, тормозной узел, теплообмен, температура, термическое сопротивление, работоспособность, расчет, тепловой поток.

Энергонасыщенность транспортных средств в настоящее время имеет тенденцию к повышению. Однако, узлы трения, в частности тормоза, их конструктивное исполнение и размеры, остаются, как правило, без изменения. Это приводит к повышенному температурному режиму, что сказывается на снижении гарантированного безотказного срабатывания тормозных узлов. Так, в горных районах на спусках из-за этого приходится использовать низкие передачи коробки переменных передач, так как работоспособность тормозов из-за нагрева снижается. Таким образом, недооценка тепловых явлений тормозных узлов может привести к нежелательным результатам.

Имеющиеся методики конструктивного расчета, учитывающие температурных режим, тормозных узлов справедливы для случаев непродолжительного времени взаимодействия тормозных узлов. Эксплуатационные условия тормозных узлов транспортных машин в настоящее время испытывают порой длительные и частные включения. В связи с этим для принятия надежного конструктивного решения по изготовлению тормозов необходимо проводить более точный тепловой расчет, который будет определяться не только нагрузочно-скоростным режимам транспорта, но и учетом термических сопротивлений на пути теплорассеивания теплового потока и его условиями. Все это будет характеризовать пассивную безопасность транспортного средства в целом.

В тормозных узлах, в местах соединения различных поверхностей, через которые проходит рассеиваемый тепловой поток, на его пути возникают контактные термические сопротивления (КТС). Контактные термические сопротивления определяются местами фактического контакта соприкасающихся поверхностей твердых тел, по отношению к которым и происходит перераспределение линий теплового потока — конвергенция теплового потока. Величина КТС может быть значительной и существенно влиять в целом на температурный режим теплонапряженных объектов, к которым относятся и тормозные узлы.

Рассмотрим теплообмен между двумя «полуограниченными» телами, начальная температура которых t_1^0 и t_2^0 . В процессе теплообмена между данными телами в зоне контакта формируется температурный перепад, величина которого будет определяться КТС.

Дифференциальные уравнения теплопроводности в данном случае будут иметь вид:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \alpha_1 \times \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}, \quad x < 0 \text{ и } \tau > 0;$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \times \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}, \quad x > 0 \text{ и } \tau > 0,$$

где x — величина, характеризующая координату пути теплового потока в контактной паре, м.; $\alpha_{1,2}$ — коэффициенты температуропроводности материалов контактирующих пар, м²/с; τ — время, с.

Граничные условия для данной задачи принимаем в виде

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} \Big|_{x=0};$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{R_K} \times (t_2(0, \tau) - t_1(0, \tau)), \quad \tau > 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial t_2(x, \tau)}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\partial t_1(x, \tau)}{\partial x} = 0,$$

где R_K — термическое сопротивление контакта, м²•град/Вт; $t_2(0, \tau)$ — температуры на границах контактирующих тел, °С; $\lambda_{1,2}$ — коэффициенты теплопроводности материалов контактирующей пары, Вт/м•град.

Начальные условия принимаем в форме

$$t_1(x, 0) = t_1^0; \quad t_2(x, 0) = t_2^0.$$

Задачу будем решать, применяя интегральное преобразование Лапласа. Введем обозначение

$$L[t_1(x, \tau)] = \int_0^\infty t_1(x, \tau) \times e^{-p\tau} d\tau = T_1(x, P);$$

$$L[t_2(x, \tau)] = \int_0^\infty t_2(x, \tau) \times e^{-p\tau} d\tau = T_2(x, P).$$

Тогда уравнение теплопроводности, начальные и граничные условия примут вид

$$PT_1(x, P) - t_1^0 = \alpha_1 \times T_{1x}''(x, P) \quad (1)$$

или

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - P \times \frac{T_1}{\alpha_1} = -\frac{t_1^0}{\alpha_1}, \quad x < 0;$$

$$PT_2(x, P) - t_2^0 = \alpha_2 \times T_{2x}''(x, P) \quad (2)$$

или

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} - P \times \frac{T_2}{\alpha_2} = -\frac{t_2^0}{\alpha_2}, \quad x > 0;$$

$$-\lambda_1 \times T_{1x}'(0, P) = \lambda_2 \times T_{2x}'(0, P). \quad (3)$$

$$-\lambda_1 \times T_{1x}'(0, P) = \frac{(T_2(0, P) - T_1(0, P))}{R_K}. \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} T_{1x}'(x, P) = 0. \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{2x}'(x, P) = 0. \quad (6)$$

Общее решение (1) имеет вид

$$T_1(x, P) = c_1(P) \times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}} + c_2(P) \times e^{\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}}} + \frac{t_1^0}{P}, \quad x < 0.$$

В силу условия (6) $c_1(P) \equiv 0$, получаем

$$T_1(x, P) = c_2(P) \times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x} \times |x|}} + \frac{t_1^0}{P}, \quad x < 0.$$

Общее решение (2)

$$T_2(x, P) = c_3(P) \times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}} + c_4(P) \times e^{\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}}} + \frac{t_2^0}{P}, \quad x > 0.$$

В силу условия (5) $c_4(P) \equiv 0$, получаем

$$T_2(x, P) = c_3(P) \times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}}} + \frac{t_2^0}{P}, \quad x > 0.$$

Из (3) следует

$$PT_1(x, P) - t_1^0 = \alpha_1 \times T_{1x}''(x, P)$$

или

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - P \times \frac{T_1}{\alpha_1} = -\frac{t_1^0}{\alpha_1}, \quad x < 0;$$

$$\lambda_1 - c_2(P) \sqrt{\frac{P}{\alpha_1}} = -\lambda_2 - c_3(P) \sqrt{\frac{P}{\alpha_2}};$$

или

$$c_2(P) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times c_3(P).$$

Согласно условию (4)

$$\lambda_1 c_2(P) \sqrt{\frac{P}{\alpha_1}} = \frac{1}{R_K} \left(c_3(P) + \frac{t_2^0}{P} \right) - c_2(P) - \frac{t_1^0}{P}$$

или

$$-\lambda_1 \sqrt{\frac{P}{\alpha_1}} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \times \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times c_3(P) = \frac{1}{R_K} \left(c_3(P) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \times \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times c_3(P) - \frac{t_2^0 - t_1^0}{P \times R_K}$$

или

$$c_3(P) \left[\frac{1}{R_K} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times \frac{1}{R_K} + \sqrt{\frac{P}{\alpha_2}} \times \lambda_2 \right] = \frac{t_1^0 - t_2^0}{P \times R_K}.$$

Следовательно

$$c_3(P) = \frac{t_1^0 - t_2^0}{P \times R_K \left[\frac{1}{R_K} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times \frac{1}{R_K} + \sqrt{\frac{P}{\alpha_2}} \times \lambda_2 \right]} = \dots$$

$$= \frac{t_1^0 - t_2^0}{P \times R_K \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} \left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} + \sqrt{P} \right]} \times \frac{\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K}}{P \left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} + \sqrt{P} \right]} = \dots$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1 (t_1^0 - t_2^0)}{\sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1 + \sqrt{\alpha_1} \times \lambda_2} \times \frac{\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K}}{P \left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} + \sqrt{P} \right]}; \quad (7)$$

$$c_2(P) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \times c_3(P) = \frac{\lambda_2 \sqrt{\alpha_1} (t_2^0 - t_1^0)}{\sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1 + \sqrt{\alpha_1} \times \lambda_2} \times \frac{\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K}}{P \left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} + \sqrt{P} \right]}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$T_1(x, P) = \frac{\lambda_2 \sqrt{\alpha_1} (t_2^0 - t_1^0)}{\sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1 + \sqrt{\alpha_1} \times \lambda_2} \times \frac{\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K}}{P \left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} + \sqrt{P} \right]} \times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^x}} |x|} + \frac{t_1^0}{P}, \quad x < 0;$$

$$T_2(x, P) = \frac{\lambda_1 \sqrt{\alpha_2} (t_1^0 - t_2^0)}{\sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1 + \sqrt{\alpha_1} \times \lambda_2} \times \frac{\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K}}{P \left[\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} + \sqrt{P} \right]} \times e^{-\sqrt{\frac{P}{\alpha_2^x}} |x|} + \frac{t_2^0}{P}, \quad x > 0.$$

Согласно таблице изображения [3] $\frac{1}{P} \leftarrow \frac{1}{P} - 1$ и

$$\frac{b \times e^{-K\sqrt{S}}}{s(b + \sqrt{S})} (K \geq 0) \leftarrow \operatorname{erfc} \frac{K}{2\sqrt{\tau}} - e^{bK} \times e^{b^2\tau} \times \operatorname{erfc} \left(b\sqrt{\tau} + \frac{K}{2\sqrt{\tau}} \right);$$

$$\operatorname{erfc} U = 1 - \operatorname{erfc} U = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^U e^{-U^2} \times dU = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_U^\infty e^{-U^2} \times dU.$$

Введем обозначения

$$K = \frac{|x|}{\sqrt{\alpha_{1,2}}}; \quad b = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K}.$$

Для $T_1(x, P)$ и $T_2(x, P)$ находим окончательные решения в виде

$$t_1(x, \tau) = L^{-1} [T_1(x, P)] = \dots$$

$$= t_1^0 + \frac{\lambda_2 \sqrt{\alpha_1} (t_2^0 - t_1^0)}{\sqrt{\alpha_1} \times \lambda_2 + \sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1} \times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2\tau}} - \exp \left[\frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_1}} \left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} \right) \right] \times \exp \left[\tau \left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \dots \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} \right)^2 \right] \times \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} \right) \sqrt{\tau} + \frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_1\tau}} \right] \right\};$$

$x < 0, t > 0.$

$$t_2(x, \tau) = L^{-1} [T_2(x, P)] = \dots$$

$$= t_1^0 + \frac{\lambda_1 \sqrt{\alpha_2} (t_2^0 - t_1^0)}{\sqrt{\alpha_1} \times \lambda_2 + \sqrt{\alpha_2} \times \lambda_1} \times \left\{ \operatorname{erfc} \frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}} - \exp \left[\frac{|x|}{\sqrt{\alpha_1}} \left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} \right) \right] \times \exp \left[\tau \left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \dots + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} \right)^2 \right] \times \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\lambda_2 \times R_K} + \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\lambda_1 \times R_K} \right) \sqrt{\tau} + \frac{|x|}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}} \right] \right\};$$

$x > 0, t > 0$.

Использование в расчетной практике зависимостей (9) и (10) позволяет определять значения температурных перепадов и температур поверхностей в контактных парах с учетом контактных термических сопротивлений рассеиваемым тепловым потокам в тормозных узлах. Это уточняет тепловые расчеты тормозных узлов транспортных машин, что может быть учтено при улучшении теплоотвода из зон трения. Уменьшение термических сопротивлений тепловым потокам, возникающим в зоне трения тормозных узлов в свою очередь зависит от теплофизических свойств, формы и размеров трущихся пар, а также от конструкции всего фрикционного узла.

Учет в тепловых расчетах тормозных узлов транспортных машин термических сопротивлений тепловому рассеиваемому потоку, в конечном счете, улучшит эксплуатационные показатели тормозных узлов, что непременно скажется на пассивной безопасности транспортных машин в целом.

Литература

1. Григорьев, И. М. Экспериментальные исследования влияния технического состояния тормозных механизмов на характер протекания тормозных сил / И. М. Григорьев, В. Ю. Ткачев, А. А. Смолин // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2008. – № 2 (34). – С. 28–30.
2. Дыгало, В. Г. Комплексная оценка влияния неустойчивости характеристик элементов тормозного механизма колеса автомобиля, возникающих в процессе эксплуатации / В. Г. Дыгало, В. В. Котов, Г. В. Бойко, Л. В. Дыгало, А. А. Ревин // Известия Волгоградского государственного технического университета. Серия: Наземные транспортные системы. – 2015. – Т. 12, № 6 (166). – С. 16–19.
3. Лобкова, Н. А. Температурное поле и тепловые напряжения в рулонированном цилиндре при неидеальном контакте витков / Н. А. Лобкова // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1980. – № 20. – С. 19–22.
4. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
5. Лыков, А. В. Тепломассообмен / А. В. Лыков // Справочник. – М. : Энергия, 1972. – 560 с.
6. Макаров, А. М. Температурные поля в составных конструкциях при переменном контакте сопрягаемых элементов / А. М. Макаров, В.Р. Романовский // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1979. – № 5. – С. 156–162.
7. Озябкин, А. Л. Физико-математическое моделирование фрикционного контакта диско-колodочного тормозного механизма автомобиля / А. Л. Озябкин, П. В. Харламов, А. П. Павлов // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. – 2009. – № 1 (33). – С. 15–22.
8. Потянихин, Д. А. К выбору физически обоснованных решений автомодельных краевых задач нелинейной динамической теории упругости / Д. А. Потянихин, О. В. Дудко // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4-5. – С. 2440–2442.
9. Радаев, Ю. Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля: учебное пособие / Ю. Н. Радаев, С. А. Лычев. – Самара : Изд-во «Универс-групп», 2005. – 60 с.

10. Турсунов, А. А. Оценка приспособления тормозных систем автомобилей к горным условиям эксплуатации по темпу охлаждения тормозных механизмов / А. А. Турсунов, Б. Ж. Мажитов // Известия Санкт-Петербургского государственного аграрного университета. – 2010. – № 20. – С. 316–320.

11. Boley, B. A. Survey of recent developments in the fields of heat conduction in solids and thermoelasticity. Nuc. Eng. Des. – 1972. – 18. – P. 377–399.

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ С ДИНАМИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Богатов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева

Аннотация. В статье рассматривается нелокальная задача с интегральным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, единственность решения, разрешимость задачи.

Введение

Строительные конструкции и сооружения в значительной степени подвержены как природным, так и техногенным динамическим воздействиям, к которым можно отнести ветровые и сейсмические воздействия, нагрузки от оборудования, движущегося транспорта, пешеходов.

Энергия колебаний инженерных систем постепенно рассеивается за счет внутреннего трения в материале и внешнего сопротивления, что, безусловно, влияет на их колебательный процесс, а снижение интенсивности внешних динамических воздействий приводит к затуханию колебаний. Проводятся динамические расчеты конструкций и сооружений, выявляются их динамические характеристики (частота, форма собственных колебаний, определение напряженно-деформированного состояния, оценка прочности и долговечности при воздействии нагрузок). Также, стоит отметить, что необходимо учитывать влияние эффекта внутреннего демпфирования, которое гасит колебания за счет трения в материале и тем самым влияет на общий колебательный процесс. И если уже известно, как учитывать эффекты внешнего трения (внешнее гашение колебаний), то задача учета внутреннего трения до сих пор не имеет однозначного решения. Переходя к математическим терминам, мы получаем задачу с нелокальными условиями, которая описывает модель внутреннего трения (нелокального демпфирования материала).

В современной теории дифференциальных уравнений задачи с нелокальными условиями представляют собой довольно развивающееся направление. Исследования задач с нелокальными условиями показали, что классические подходы к их решению неприменимы, то есть встает задача о разработке принципиально-новых методов решения задач.

Мы дадим определение обобщенного решения изучаемой задачи, докажем теорему о единственности определенного нами решения.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$\alpha u \equiv u_{tt} - (au_x)_x + bu_t + cu = f(x, t), \quad (1)$$

и поставим задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) = 0. \quad (3)$$

Как известно [1, 3–8], решение задачи с динамическими условиями вида (3) вызывает затруднения даже для уравнения колебаний струны. Мы же рассматриваем уравнение, коэффициенты которого суть произвольные функции аргументов x, t , что делает бессмысленной попытку получить решение задачи методом разделения переменных или воспользоваться общим решением уравнения. Однако удалось доказать однозначную разрешимость поставленной задачи в пространстве Соболева, что и демонстрируется в статье.

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) и его правая часть удовлетворяют следующим условиям:

$$a, a_t, a_{tt}, b, b_t, b_{tt}, c \in C(\bar{Q}_T), f \in L_2(Q_T), a(x, t) \geq a_0 > 0.$$

Введем определение обобщенного решения. Для этого, следуя [2], рассмотрим равенство

$$\int_0^T \int_0^l v Lu \, dx dt = \int_0^T \int_0^l f v \, dx dt,$$

где $v(x, t)$ – произвольная гладкая функция, такая, что $v(T) = 0$, в предположении, что $u(x, t)$ решение поставленной задачи.

Интегрируем левую часть по частям:

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + b u_t v + c u v) \, dx dt + \gamma \int_0^T a(l, t) v(l, t) u_t(l, t) \, dt = \int_0^T \int_0^l f v \, dx dt. \quad (4)$$

Заметим, что (4) выполняется и при меньших требованиях на функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ а именно, все входящие в него интегралы существуют, если $u \in W(Q_T)$, $v \in \hat{W}(Q_T)$, где обозначено

$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), u_t(l, t) \in L_2(0, T)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u \in W(Q_T)$, если $u(x, 0) = 0$ и для любого $v \in \hat{W}(Q_T)$ справедливо (4).

2. Решение задачи

Теорема. Если

$$a, a_t, a_{tt}, b, b_t, b_{tt}, c \in C(\bar{Q}_T), f \in L_2(Q_T), a(x, t) \geq a_0 > 0,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

2.1. Единственность решения

Предположим, что существует два обобщенных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (1). Тогда их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + b u_t v + c u v) \, dx dt + \gamma \int_0^T a(l, t) v(l, t) u_t(l, t) \, dt = 0. \quad (5)$$

Выберем в (5)

$$\begin{cases} \int_0^t u(x, \eta) d\eta, & x \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Заметим, что $v_t(x, t) = u(x, t)$. Интегрируя по частям в левой части (5), получим

$$\int_0^T \int_0^l -u_t v_t \, dx dt = - \int_0^T \int_0^l u_t u \, dx dt = - \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, \tau) dx;$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^l a u_x v_x dx dt &= - \int_0^T \int_0^l a v_{xt} v_x dx dt = - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l a_t v_x^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^l a v_x^2(x, 0) dx; \\
\int_0^T \int_0^l b u_t v dx dt &= \int_0^T \int_0^l b u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l b_{tt} v^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l b_t(x, 0) v^2(x, 0) dx; \\
\int_0^T a(l, t) v(l, t) u_t(l, t) dx &= - \int_0^T a(l, t) u^2(l, t) dt - \int_0^T a_t v_t(l, t) v(l, t) dt = \\
&= \int_0^T a(l, t) u^2(l, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T a_{tt} v^2(l, t) dt + \frac{1}{2} a_t(l, 0) v^2(l, 0).
\end{aligned}$$

Подставим полученные результаты в (5), получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^l [u^2(x, \tau) + a v_x^2(x, 0)] dx + \int_0^T a(l, t) u^2(l, t) dt = \\
&= 2 \int_0^T \int_0^l c u v dx dt - \int_0^T \int_0^l a_t v_x^2 dx dt - 2 \int_0^T \int_0^l b u^2 dx dt + \int_0^T \int_0^l b_{tt} v^2 dx dt + \\
&+ \int_0^l b_t(x, 0) v^2(x, 0) dx + \int_0^T a_{tt}(l, t) v^2(l, t) dt + a_t(l, 0) v^2(l, 0).
\end{aligned} \tag{6}$$

Так как $a(x, t) > 0$ всюду в $\bar{Q}_T$, то из (6) следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0) v_x^2(x, 0)] dx + \int_0^T a(l, t) u^2(l, t) dt \leq 2 \left| \int_0^T \int_0^l c u v dx dt \right| + \\
&+ \left| \int_0^T \int_0^l a_t v_x^2 dx dt \right| + 2 \left| \int_0^T \int_0^l b u^2 dx dt \right| + \left| \int_0^T \int_0^l b_{tt} v^2 dx dt \right| + \\
&+ \left| \int_0^l b_t(x, 0) v^2(x, 0) dx \right| + \left| \int_0^T a_{tt}(l, t) v^2(l, t) dt \right| + |a_t(l, 0) v^2(l, 0)|.
\end{aligned} \tag{7}$$

Оценим правую часть (7). Если $c, a, a_t, b, b_t, b_{tt} \in C(\bar{Q}_T)$, то существуют числа a_1, c_0, b_0 такие, что $|a, a_t, a_{tt}| \leq a_1$, $|b, b_t, b_{tt}| \leq b_0$, $|c| \leq c_0$, тогда

$$\begin{aligned}
2 \left| \int_0^T \int_0^l c u v dx dt \right| &\leq c_0 \int_0^T \int_0^l (u^2 + v^2) dx dt; \\
\left| \int_0^T \int_0^l a_t v_x^2 dx dt \right| &\leq a_1 \int_0^T \int_0^l v_x^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $v(x, 0) = - \int_0^T u(x, t) dt$ и используя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$v^2(x, 0) = \left(\int_0^T u dt \right)^2 \leq \tau \int_0^T u^2 dt.$$

Применим неравенство (3.9) из [1]:

$$v^2(l, t) \leq 2l \int_0^l v_x^2(x, t) dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x, t) dx.$$

Получим

$$\left| \int_0^T a_{tt}(l, t) v^2(l, t) dt \right| \leq 2a_1 l \int_0^T \int_0^l v_x^2 dx dt + \frac{2a_1}{l} \int_0^T \int_0^l v^2(x, t) dx dt.$$

Для оценки слагаемых, содержащих значение $v(l, t)$ применим неравенство Коши «с ε » [2]:

$$\begin{aligned} |a_1(l, 0)v^2(l, 0)| &\leq a_1\varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + a_1c(\varepsilon) \int_0^l +0^l v^2(x, 0) dx \leq \\ &\leq a_1\varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + a_1c(\varepsilon)\tau \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt. \end{aligned}$$

Выберем ε так, чтобы $\mu = a_0 - a_1\varepsilon > 0$ и перенесем интеграл из левой части в правую:

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + \mu v_x^2(x, 0)] dx \leq M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2 + v^2) dx dt, \quad (8)$$

где $M = \max\{a_1c(\varepsilon), a_1c(\varepsilon)\tau\}$.

Проведем ряд вычислений. Поскольку

$$v^2(x, t) = \left(\int_t^\tau nd\eta \right)^2 \leq (\tau - t) \int_0^\tau u^2 dt,$$

то в правой части (8)

$$M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2 + v^2) dx dt \leq M \int_0^\tau \int_0^l \left(u^2 + v_x^2 + \tau \left(\int_0^\tau u^2 \right) \right) dx dt \leq M_1 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2) dx dt,$$

где $M_1 = M + \tau^2$.

Так как под знаком интеграла в левой части есть слагаемое $v_x(x, 0)$, а в правой нет, то введем функции

$$w(x, t) = \int_0^\tau u_x d\eta,$$

откуда

$$v_x(x, t) = w(x, t) - w(x, \tau) \Rightarrow v_x(x, 0) = -w(x, \tau).$$

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + \mu w^2(x, \tau)] dx \leq M_1 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + 2M_1 \int_0^\tau \int_0^l w^2(x, t) dx dt + 2M_1 \int_0^\tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx dt.$$

Заметим, что

$$\int_0^\tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx dt = \tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx.$$

Выберем в силу произвольности τ так, чтобы $\mu - 2M_1\tau > 0$. Пусть для определенности $\mu - 2M_1\tau \geq \frac{\mu}{2}$, тогда для $\tau \in [0, M / 4M_1]$

$$m_0 \int_0^l [u^2(x, \tau)] dx \leq 2M_1 \int_0^\tau \int_0^l [u^2(x, \tau) + w^2(x, \tau)] dx dt, \quad (9)$$

где $m_0 = \min\left\{1, \frac{M}{2}\right\}$.

Применение к последнему равенству леммы Гронуолла приводит к

$$u(x, \tau) = 0, \quad \tau \in \left[0, \frac{M}{4M_1}\right].$$

Продолжая данную процедуру для $\tau \in \left[\frac{M}{4M_1}, \frac{M}{2M_1}\right]$ по алгоритму из [2], получаем снова нули, из чего следует единственность обобщенного решения поставленной задачи.

2.2. Существование решения

Пусть функции $w_k(x) \in C^2(0, l)$ линейно независимы и образуют полную систему в $W_2^1(0, l)$. Будем искать решение задачи (1) в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) w_k(x). \quad (10)$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_t^m w_j + a u_x^m w_j' + b u_t^m w_j + c u^m w_j) dx + \gamma [a(l, t) u_t^m(l, t) w_j(l)] = \int_0^l f w_j dx. \quad (11)$$

Подставив в (11) представление $u^m(x, t)$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^m \left[c_k''(t) \int_0^l w_k w_j + c_k(t) \int_0^l a w_{kx} w_j + b w_t^m w_j + c w_k w_j dx + \gamma a w_{kt} w_j \right] = \int_0^l f w_j dx,$$

присоединив к которой начальные условия

$$c_k(0) = 0, \quad c_k'(0) = 0,$$

получим задачу Коши.

Умножим каждое соотношение (11) на соответствующие c_j' , просуммируем от 1 до m , затем проинтегрируем полученные равенства от 0 до τ , получим

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b (u_t^m)^2 + c u^m u_t^m) dx dt + \gamma \int_0^\tau \int_0^l a (u_t^m(l, t))^2 dt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt. \quad (13)$$

Интегрируем по частям, учитывая, что $u^m(x, 0) = u_t^m(x, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l u_{tt}^m u_t^m dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^m(x, \tau))^2 dx; \\ \int_0^\tau \int_0^l a u_x^m u_{xt}^m dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a u_{xt}^m u_x^m dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m(x, \tau))^2 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^\tau \int_0^l a u_x^m u_{xt}^m dx dt &= -\frac{1}{2} a_t (u_x^m)^2 dx dt + \frac{1}{2} a (u_x^m(x, \tau))^2 dx. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2] dx + \int_0^\tau \int_0^l b (u_t^m)^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt + \gamma \int_0^\tau \int_0^l a (u_t^m(l, t))^2 dt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Оставим в левой части только положительные члены:

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau \int_0^l a (u_t^m(l, t))^2 dt = \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt - \\ - 2 \int_0^\tau \int_0^l b (u_t^m)^2 dx dt - 2 \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) вытекает неравенство:

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau a(u_t^m(l, t))^2 dt \leq \int_0^\tau \int_0^l |a_t| (u_x^m)^2 dx dt - \\ - 2 \int_0^\tau \int_0^l |b| (u_t^m)^2 dx dt - 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l cu^m u_t^m dx dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l fu_t^m dx dt \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $a, a_t, b, c \in C\bar{Q}_t$ следственно, существуют числа a_1, a_2, b_1, c_0 положительные и такие, что

$$|a| \leq a_1, \quad |b| \leq b_1, \quad |c| \leq c_0.$$

Оценим правую часть (16), используя неравенство Коши:

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l cu^m u_t^m dx dt \right| \leq c_0 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2] dx dt, \\ 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l fu_t^m dx dt \right| \leq \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом, из (16):

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + a(u_x^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau a(u_t^m(l, t))^2 dx \leq \\ \leq \int_0^\tau \int_0^l [a_2(u_x^m)^2 + (2b_1 + c_0 + 1)(u_t^m)^2 + c_0(u^m)^2] dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Учтем, что

$$u^m(x, \tau) = \int_0^\tau u_t^m(x, t) dt,$$

откуда следует неравенство

$$\int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx \leq \tau \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m)^2 dx dt.$$

Прибавим это неравенство к (17):

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u^m(x, \tau))^2 + (u_t^m(x, \tau))^2 + a(u_x^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma \int_0^\tau a(u_t^m(l, t))^2 dt \leq \\ \leq \int_0^\tau \int_0^l [a_2(u_x^m)^2 + (2b_1 + c_0 + 1 + \tau)(u_t^m)^2] dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt, \end{aligned}$$

где $m_0 = \min\{1, a_0\}$, $M = \max\{a_2, 2b_1 + c_0 + 1 + \tau\}$, следственно,

$$\begin{aligned} m_0 \int_0^l [(u^m(x, \tau))^2 + (u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau))^2] dx + 2\gamma a_0 \int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt \leq \\ \leq M \int_0^\tau \int_0^l [(u_x^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u^m)^2] dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Применим лемму Гронуолла:

$$\int_0^l [(u^m(x, \tau))^2 + (u_t^m(x, \tau))^2 + (u_x^m(x, \tau))^2] dx \leq e^{\frac{M_\tau}{m_0}} \frac{1}{m_0} \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt.$$

Интегрируя в промежутке $\tau \in [0, T]$, получаем

$$\|u^m\|_{W'_2(Q_T)}^2 \leq C \|f\|_{L_2(Q_T)}^2$$

где $C = \frac{1}{M} \left(e^{\frac{M_\tau}{m_0}} - 1 \right)$.

Из полученного неравенства следует оценка нормы

$$\int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt \leq N \|f\|_{L_2(Q_T)}^2$$

$$\forall \tau \in [0, T] \Rightarrow \|u_t^m(l, t)\|_{L_2(Q_T)}^2, \quad \Gamma = \{(x, t) : x = l, t \in [0, T]\}.$$

Введем обозначения

$$W(Q_T) = \{u(x, t) : u \in W'_2(Q_T), u_t \in L_2(\Gamma_l)\},$$

$$\bar{W}(Q_T) = \{v(x, t) : v \in (Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

Таким образом получаем, что $\{u^m\}$ ограничена в $W(Q_T)$ и можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность.

Покажем, что $u(x, t)$ – обобщенное решение задачи.

Начальное условие будет выполнено в силу слабой сходимости в $W(Q_T)$ $u^m(x, t)$ к $u(x, t)$ и того, что $u^m(x, 0) = 0$, $u_t^m(x, 0) = 0$ в $L_2(0, l)$. Покажем, что этот предел удовлетворяет (4). Умножим (11) на функцию $h_j(t) \in C^1(Q_T)$ такую, что $h_j(T) = 0$, просуммируем по i и проинтегрируем по t от 0 до T .

Обозначим

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) w_j(x),$$

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m \eta + a u_x^m \eta_t + b u_t^m \eta + c u^m \eta) dx dt + \gamma \int_0^\tau a(l, t) u_t^m \eta dt = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) \eta(x, t) dx dt.$$

Проинтегрируем по частям, учитывая, что $\eta(x, t) = 0$:

$$\int_0^\tau \int_0^l (-u_t^m \eta_t + a u_x^m \eta_t + b u_t^m \eta + c u^m \eta) dx dt + \gamma \int_0^\tau a u_t^m \eta dt -$$

$$- \int_0^l u_t^m(x, 0) \eta(x, 0) dx = \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) \eta(x, t) dx dt. \quad (19)$$

Тождество (19) справедливо для любой функции $\eta(x, t)$. Обозначим совокупность таких функций через θ_m . В (19) перейдем к пределу фиксированной функции $\eta(x, t) \in \theta_m$. Это приведет к начальным условиям для предельной функции $u(x, t)$. Следовательно, $u(x, t)$ – обобщенное решение поставленной задачи.

Заключение

Таким образом, нами была поставлена задача для гиперболического уравнения с динамическим условием $u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) = 0$, получено обобщенное решение поставленной задачи. Проведены необходимые преобразования, получены оценки для доказательства единственности и существования решения уравнения.

Литература

1. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л. С. Пулькина. – Самара : Издательство Самарский университет, 2012.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973.
3. Рогожников А. М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний / А.М. Рогожников. – Издательство Макс-пресс. – 2013.
4. Бейлин А. Б. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями / А. Б. Бейлин, Л. С. Пулькина. – Издательство Самарский университет. – 2014.
5. Doronin G. G. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // G. G. Doronin, N. A. Lar'kin, A. J. Souza // EJDE. – 1998.
6. Louw T. Forced wave motion with internal and boundary damping / T. Louw, S. Whitney, A. Subramanian, H. Viljoen // Journal of applied physics. – 2012.
7. Pulkina L. S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation / L. S. Pulkina / Russian Mathematics. – 2016.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский / Издательство «Наука». – 2004.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ

М. Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача для неоднородного волнового уравнения на геометрическом графе, состоящем из двух ребер-колец. Использован новый подход, предложенный А. П. Хромовым, который опирается на идеи по ускорению сходимости рядов, исследование резольвенты соответствующего оператора и специальное преобразование формального ряда, и позволяет представить решение в виде нового быстроходящегося ряда с экспоненциальной скоростью сходимости. Доказано существование классического решения задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, геометрический граф, волновое уравнение, классическое решение.

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения на простейшем геометрическом графе, состоящем из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа). При параметризации каждого ребра графа отрезком $[0, 1]$, задача будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x, t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x, t) + f_j(x, t), \quad (1)$$

$$(j = 1, 2), \quad (x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty),$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = u_2(0, t) = u_2(1, t), \quad (2)$$

$$u'_{1x}(0, t) - u'_{1x}(1, t) + u'_{2x}(0, t) - u'_{2x}(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u'_{1t}(x, 0) = \psi_1(x), \quad u'_{2t}(x, 0) = \psi_1(x) \quad (4)$$

(условия (2), (3) порождены структурой графа).

С применением резольвентного подхода при $f_j(x, t) \equiv 0$, $\psi_j(x) \equiv 0$ в [1] получено классическое решение смешанной задачи на таком графе в случае непрерывных $q_j(x)$, в [2] – в случае суммируемого потенциала. При этом метод Фурье применялся с использованием идей по ускорению сходимости рядов, идущих от А. Н. Крылова, и позволяющих получать классическое решение при минимальных требованиях на начальные функции.

Здесь будет использован иной подход, предложенный А. П. Хромовым в [3–6], снова опирающийся на идеи по ускорению сходимости рядов, но подразумевающий иное преобразование формального ряда. Такой подход позволил получить необходимые и достаточные условия существования классических и обобщенных решений ряда задач в случаях суммируемых потенциалов и начальных функций, и далее с использованием в [5–6] расходящихся рядов расширить границы применения метода Фурье. В данной работе рассмотрен случай $q_j(x) \in C[0, 1]$ (случай $q_j(x) \in L[0, 1]$ исследуется с привлечением расходящихся рядов, используя технику работ [5–6]).

Будем предполагать, что все функции, входящие в (1)–(4) комплекснозначные, и выполнены требования:

$$\begin{aligned} q_j(x) \in C[0, 1], \quad \varphi_j(x) \in C^2[0, 1], \quad \psi_j(x) \in C^1[0, 1], \quad f_j(x, t) \in C(Q) \\ \varphi'_1(0) - \varphi'_1(1) + \varphi'_2(0) - \varphi'_2(1) = 0, \\ \varphi''_1(0) = \varphi''_1(1) = \varphi''_2(0) = \varphi''_2(1). \end{aligned} \quad (5)$$

(также как в [1] для простоты ограничимся случаем $q_1(0) = q_2(0) = q_1(1) = q_2(1)$, и кроме того, $f_1(0, 0) = f_1(1, 0) = f_2(0, 0) = f_2(1, 0)$). В дальнейшем будем использовать обозначения

$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$, $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))^T$ и $f(x, t) = (f_1(x, t), f_2(x, t))^T$ (T – знак транспонирования), $Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_2(x))$. Условия (5) являются минимальными для существования классического решения и следуют из постановки задачи. Классическим решением будем называть вектор-функцию $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$, компоненты которой дважды непрерывно дифференцируемы по x и t , и удовлетворяют (1)–(4).

Также как в [3–4] можно показать, что если $u(x, t)$ классическое решение задачи (1)–(4), то оно может быть найдено по формуле

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left[(R_\lambda \varphi) \cos \rho t + - \right. \\ \left. + R_\lambda(\psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} + \int_0^t R_\lambda(f(\cdot, \tau)) \frac{\sin \rho(t-\tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (6)$$

где R_λ – резольвента оператора:

$$Ly = (-y_1''(x) + q_1(x)y_1(x), -y_2''(x) + q_2(x)y_2(x))^T,$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0) = y_2(1), \quad y_1'(0) - y_1'(1) + y_2'(0) - y_2'(1) = 0,$$

$\lambda = \rho^2$, $\text{Re} \rho \geq 0$, $r > 0$ и достаточно велико, γ_n есть образ в λ – плоскости окружностей $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ (см. [1]), $\delta > 0$ достаточно мало и фиксировано, $R_\lambda(f(\cdot, \tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x, \tau)$ по x . Ряд в (6) при фиксированном $t \geq 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$.

Обозначим через $Z(x, t, \varphi)$ ряд (6) при $\psi_j(x) = f_j(x, t) = 0$. Из (6) получим представление:

$$u(x, t) = Z(x, t, \varphi) + \int_0^t Z(x, \tau, \psi) d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z(x, \eta, f(\cdot, \tau)) d\eta \quad (7)$$

(в случае суммируемого потенциала такое представление было предложено А. П. Хромовым в [5–6] с привлечением теории расходящихся рядов). При этом $Z(x, t, \varphi)$ есть решение задачи (1)–(4) при $\psi(x) = f(x, t) = 0$ (будем обозначать такую задачу (А)). Поэтому фактически требуется рассмотреть только задачу (А) при разных начальных функциях $\varphi(x)$.

В [1–2] для формального решения задачи (А)

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \quad (8)$$

использовалось представление

$$u(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t). \quad (9)$$

Здесь $U_0(x, t)$ есть (8), где R_λ заменено на $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, L_0 есть оператор L при $q(x) = 0$.

Ряд $U_0(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно по всем x и t . Обозначим его сумму $A_0(x, t)$. Справедлив следующий результат [1]

Теорема 1. Ряд $U_0(x, t)$ является классическим решением задачи (А) при $q_j(x) \equiv 0$, при этом для суммы $A_0(x, t)$ ряда имеет место формула

$$U_0(x, t) = A_0(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{F}(x+t) + \tilde{F}(x-t)),$$

где вектор-функция $\tilde{F}(x) = (\tilde{F}_1(x), \tilde{F}_2(x))^T$ дважды непрерывно дифференцируема на всей оси, при этом $\tilde{F}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$, а на всю ось продолжается с помощью соотношений

$$\tilde{F}_1(-x) = \frac{1}{2} [\tilde{F}_1(1-x) + \tilde{F}_2(1-x) - \tilde{F}_1(x) + \tilde{F}_2(x)],$$

$$\tilde{F}_2(-x) = \frac{1}{2} [\tilde{F}_1(1-x) + \tilde{F}_2(1-x) + \tilde{F}_1(x) - \tilde{F}_2(x)],$$

$$\tilde{F}_1(1+x) = \frac{1}{2} \left[\tilde{F}_1(x) - \tilde{F}_1(1-x) + \tilde{F}_2(x) + \tilde{F}_2(1-x) \right], \quad (10)$$

$$\tilde{F}_2(1+x) = \frac{1}{2} \left[\tilde{F}_1(x) + \tilde{F}_1(1-x) + \tilde{F}_2(x) - \tilde{F}_2(1-x) \right],$$

В [1] исследование $U_1(x, t)$ проводилось с помощью оценок компонент разности резольвент $R_\lambda - R_\lambda^0$, и доказывалась возможность дважды почленного дифференцирования $U_1(x, t)$. Теперь мы поступаем иначе. Заметим, что $U_1(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - Q(x)u(x, t) + F^0(x, t), \quad (11)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = u_2(0, t) = u_2(1, t), \quad (12)$$

$$u'_{1x}(0, t) - u'_{1x}(1, t) + u'_{2x}(0, t) - u'_{2x}(1, t) = 0, \quad (13)$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = u'_{2t}(x, 0) = 0, \quad (14)$$

где $F^0(x, t) = -Q(x)A^0(x, t)$, $(x, t) \in Q$.

Представим $U_1(x, t)$ в виде:

$$U_1(x, t) = A_1(x, t) + U_2(x, t),$$

где $A_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{F}_0(\eta, \tau) d\eta$, $\tilde{F}_0(x, \tau) = F_0(x, \tau)$ при $x \in [0, 1]$, и на всю числовую ось продолжается с помощью соотношений (10), $U_2(x, t)$ – решение задачи (11)–(14) с $F_1(x, t) = -Q(x)A_1(x, t)$.

Продолжая этот процесс до бесконечности, и выполняя необходимые обоснования, аналогично работам [3–4], получим, что справедлив следующий результат.

Теорема 2. При выполнении условий (5) классическое решение задачи (A) существует и имеет вид

$$u(x, t) = A(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t),$$

$$\text{где } A_0(x, t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{F}(x+t) + \tilde{F}(x-t) \right],$$

$$A_n(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{F}_{n-1}(\eta, \tau) d\eta, \quad n \geq 1$$

и $F_n(x, t) = -Q(x)A_n(x, t)$ при $x \in [0, 1]$, $\tilde{F}_{n-1}$ есть продолжения функций F_{n-1} с помощью соотношений (10).

Используя приемы из [4, 6] доказываем существование классического решения задачи (1)–(4).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

Литература

1. Бурлуцкая М. Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе / М. Ш. Бурлуцкая // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 465, № 5. – С. 519–522.

2. *Burlutskaya M.* On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph / *M. Burlutskaya* // *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.* – 2017. – Vol. 72. – P. 37–44.
3. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // *Диф. уравнения.* – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 717–731.
4. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / *А. П. Хромов* // *ЖВМ и МФ* – 2019. – Т. 59, № 2. – С. 286–300.
5. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / *А. П. Хромов* // *Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы.* – Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. – С. 433–439.
6. *Корнев В. В.* О смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения / *В. В. Корнев, А. П. Хромов* // *Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы.* – Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. – С. 202–204.

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ И ДРУГИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

А. П. Бырдин, А. А. Сидоренко, О. А. Соколова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе представлены результаты исследования, направленного на создание метода решения задачи Коши стационарной задачи для уравнений, содержащих линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и нелинейный аналитический функционал. Методом рядов Вольтерра-Фреше получено стационарное решение дифференциального уравнения второго порядка с аналитическим функционалом, описывающего колебания нелинейного вибратора, обладающего наследственным поведением. Изучено поведение решения и зависимость энергетических потерь от физических параметров.

Ключевые слова: аналитический функционал, ряды Вольтера, функционально-дифференциальные уравнения, нелинейно-наследственная упругость, нелинейный вибратор, энергетические потери.

Введение

При проектировании современных технических систем в электронике, радиотехнике, материаловедении для исследования их поведения с течением времени и при изменении нагрузки широко используются модели, описывающие состояние системы в виде нелинейных функционалов, определяющих зависимость между входными и выходными переменными

$$y(r_2, t) = \hat{F}[x(r_1, \tau), t] + \hat{L}x, \quad \tau \in (-\infty, t), \quad (1)$$

где $\hat{L}$ – дифференциальный оператор, функционал $\hat{F}$ однозначно отображает множество входных переменных x на множество выходных переменных y , причем эти переменные могут носить скалярный, векторный или тензорный характер, r_1 и r_2 – параметры. Определяющий эту зависимость функционал должен удовлетворять условиям причинности и затухающей памяти. Для стационарных систем в правой части (1) дифференциальный оператор отсутствует. Соотношение (1) указывает на то, что значение выходной переменной в момент времени t определяется поведением входной переменной во все предшествующие моменты вплоть до момента времени t .

Примерами функциональных устройств, используемых в электронике, являются пьезоэлектрические резонаторы, датчики Холла, негатроны и другие устройства, когда множество дискретных составляющих устройства можно заменить средой, выполняющей функции этого множества [1]. Аналогичным образом с помощью нелинейных функционалов описываются состояния и процессы в радиотехнических системах, например – антенны с нелинейной нагрузкой [2]. Как известно [3], линейная связь между векторами поляризации среды и напряженности электрического поля не пригодна для описания результатов наблюдения в конденсированных средах, когда напряженность достигает величины порядка межатомных полей, которую можно получить в современных энергетических установках при фокусировке лазерных пучков. Для описания оптических эффектов с высокой напряженностью полей материальное уравнение представляется суммой полилинейных функционалов вольтерровского типа. То есть определяющий функционал аппроксимировался аналитическим функционалом.

Анализ экспериментов на ползучесть стеклопластиков, ряда полимеров, металлов и сплавов при повышенных температурах, показывает, что кривые ползучести не описываются со-

отношениями линейной теории вязкоупругости, но достаточно хорошо аппроксимируются нелинейно-наследственной зависимостью между напряжениями и деформациями [4]. В одномерном случае такая зависимость представляется разложением аналитического функционала в ряд Вольтерра-Фреше.

$$\sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} V_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{m=1}^n \varepsilon(t-t_m) dt_m, \quad (2)$$

где $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ – напряжение и деформация, $V_n(t_1, \dots, t_n)$ – ядра релаксации n -го порядка, удовлетворяющие условиям причинности, затухающей памяти и симметричности по перестановкам аргументов [4]. В случае установившегося процесса верхний предел интегралов должен быть равным бесконечности. В работе [5] показано, что если ядро $V_1(t)$ аддитивно содержит δ -функцию, то соотношение (2) можно обратить

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{W}_n \sigma, \quad \hat{W}_n \sigma = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} W_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{m=1}^n \sigma(t-t_m) dt_m, \quad (3)$$

где ядра ползучести $W_n(t_1, \dots, t_n)$ однозначно определяются через ядра релаксации $V_k(t_1, \dots, t_k)$.

Завершает задачу построения обратного соотношения для (2) полученная в работе [6] система рекуррентных уравнений, позволяющая определить лаплас-образы ядер ползучести $W_n^*(p_1, \dots, p_n)$ через лаплас-образы ядер релаксации $V_k^*(p_1, \dots, p_k)$:

$$\begin{aligned} W_1^*(p V_1^*(p)) &= 1, \\ W_n^*(p_1, \dots, p_n) V_1^* \left(\sum_{m=1}^n p_m \right) &= -\frac{1}{n} \sum_{c|kl} \sum_{m=1}^n \sum_{|J,m|=n} W_{j_1}^*(p_1, \dots, p_{j_1}) \dots W_{j_m}^*(p_{|J,m|-1+1}, \dots, p_n) \times \\ &\times V_m^* \left(\sum_{k=1}^{j_1} p_k, \dots, \sum_{k=|J,m|-1+1}^n p_k \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $|J, m| = j_1 + \dots + j_m$, внутренняя сумма берется по натуральным решениям уравнения $|J, m| = n$, внешняя сумма берется по циклической перестановке индексов.

1. Построение решений дифференциальных уравнений с аналитическими операторами

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее изменение состояния функциональной системы

$$\left(\hat{L}_n + \hat{F}^t \right) x(t) = y(t), \quad (5)$$

$$\hat{L}_n = \sum_{k=0}^N C_{n-k} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}, \quad c_k = \text{const},$$

$\hat{F}^t$ – нелинейный аналитический оператор, представленный разложением Вольтерра-Фреше в ряд полилинейных интегральных операторов вида (2).

Решение уравнения (5) с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \quad x_k = \text{const}.$$

Решение уравнения (5) можно получить в виде ряда Вольтера

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^{t_{m-1}} W_m(t-t_1, \dots, t-t_m) \prod_{k=1}^m f(t_k) dt_k,$$

где ядра интегральных операторов определяются из системы рекуррентных уравнений вида (4)

$$f(t) = y(t) + \sum_{l=1}^n x_{l-1} \delta_{(t)}^{(n-k)},$$

$\delta_{(t)}^{(n-k)}(t)$ – производные функции Дирака.

В качестве примера приложения рассмотрим задачу о динамическом поведении нелинейного вибратора, обладающего наследственностью. В большинстве работ решение этой задачи строилось с помощью методов усреднения, что позволяет в решении учитывать только первую гармонику колебаний. Применение метода решения, основанного на его представлении аналитическим функционалом позволяет получить решение в любом приближении и учитывать влияние всего спектра гармоник.

В безразмерных переменных и параметрах $t' = \beta \cdot t$, $\omega_0^2 = \frac{E}{m\beta^2}$, $P = \frac{P_0}{m\beta^2}$, где β^{-1} – время релаксации материала пружины, m – масса осциллятора, E – коэффициент жесткости пружины, P_0 – амплитуда внешней периодической силы, уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^n \cdots \int_0^n V_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n x(t-t_k) dt_k = Pf(t), \quad (6)$$

штрих у временной переменной опущен, $x(t)$ – перемещение, ядра наследственности V_n удовлетворяют условию причинности, ядро V_1 содержит аддитивно – функцию и материал пружины не изменяет свойства с течением времени. Если поведение пружины одинаково при растяжении и сжатии, то V_{2n} , $n = 1, 2, \dots$.

Стационарное решение уравнения (6) разыскиваем в виде интегрального ряда Вольтера

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} W_n(t_1, \dots, t_n) \prod_{k=1}^n x(t-t_k) dt_k. \quad (7)$$

Таким образом, задача сводится к определению последовательности ядер $W_n(t_1, \dots, t_n)$. Для построения установившейся реакции вибратора получаем рекуррентное соотношение для Фурье-трансформант ядер вида

$$\begin{aligned} W_n^*(t_1, \dots, t_n) \cdot V_1^{0*} \left(\sum_{k=1}^n \omega_k \right) + \frac{\omega_0^2}{n} \sum_{c i k l} \sum_{m=1}^n \sum_{|J, m|=n} W_{j1}^*(\omega_1, \dots, \omega_{j1}) \dots W_{jm}^*(\omega_{|J, m-1|}, \dots, \omega_n) \times \\ \times V_m^* \left(\sum_{k=1}^{j_1} \omega_k, \dots, \sum_{k=|J, m-1|}^n \omega_k \right) = \delta_{1,n}, \\ V_1^{0*}(\omega) = -\omega^2 + \omega_0^2 \cdot V_1^*(\omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $|J, n| = j_1 + \dots + j_n$ – длина мультииндекса, j_k – натуральные числа, звездочка над буквой V_k^* , W_k^* обозначает изображение по Фурье соответствующей функции. Внутренняя сумма берется по натуральным решениям уравнения $|J, m| = n$, внешняя сумма берется по циклической перестановке индексов $1, \dots, n$ и является симметризирующей. Последнее – обусловлено требованием симметрии функций $W_n(t_1, \dots, t_n)$ относительно перестановки аргументов.

Будем далее предполагать, что функция безразмерного времени $f(t)$ является $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической и удовлетворяющей условию разложимости в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t}, \quad f(t) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad f_{-n} = \bar{f}_n,$$

где черта над буквой обозначает комплексное сопряжение.

Изменив порядок выполнения действий суммирования и произведения в выражении (8) и выполнив интегрирование по всем переменным, получим следующий вид решения дифференциального уравнения (6)

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2\pi} P)^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_{n,l}(\omega) e^{il\omega t}, \quad (9)$$

$$\psi_{n,l}(\omega) = \sum_{|M,n|=l}^{\infty} W_n^*(m_1\omega, \dots, m_n\omega) \prod_{k=1}^n f_{m_k},$$

где «длина» мультииндекса $|M, n|$ в сумме принимает как положительные, так и отрицательные значения. Выражение (9) вместе с рекуррентным соотношением (8) представляет решение задачи построения отклика нелинейной наследственно – упругой системы на периодическое возбуждение. Из вида решения следует, что отклик на возмущение является периодической функцией t с периодом возмущения. Коэффициенты построенного ряда являются аналитическими функциями амплитуды возбуждения.

В том случае, когда входной сигнал $f(t)$ аппроксимируется тригонометрическим полиномом

$$f(t) = \sum_{m=-N}^N f_m e^{im\omega t},$$

решение рассматриваемого дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2\pi} P)^n \sum_{l=-nN}^{nN} \psi_{n,l}(\omega) e^{il\omega t}.$$

2. Диссипативная характеристика нелинейного осциллятора

На основе полученных выше результатов построим решение уравнения стационарных колебаний нелинейного наследственно-упругого осциллятора с симметричной нелинейно-упругой характеристикой под действием моногармонического возмущения. В качестве меры диссипации энергии используем внутреннее трение [7], мера – широко используемая для определения параметров функций наследственности по экспериментально измеренным возбуждениям и откликам изучаемой системы.

Уравнение движения рассматриваемого осциллятора, с учетом требования симметричности его поведения, принимает вид

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} V_{(n)}(t_1, \dots, t_{(n)}) \prod_{k=1}^{2n+1} x(t - t_k) dt_k = P \sin \omega t, \quad (10)$$

где $\omega = \frac{\Omega}{\beta}$ – безразмерная частота возбуждения, t – безразмерное время, $(n) = 2n + 1$, P, β, ω_0 – определены в формуле (6), $V_{(n)}$ – весовые функции наследственности, симметричные относительно перестановок аргументов, удовлетворяющие условиям причинности и нестарения, $V_1(t)$ – аддитивно содержит дельта-функцию.

Для преобразования решения уравнения используем соотношение

$$\hat{W}_n \sin \omega t = \frac{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}{(2i)^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \hat{C}_n^m W_n(t_1, \dots, t_n) \exp[i\omega(n-2m)t],$$

где интегральный оператор $\hat{W}_n$ представляется общим членом ряда в (7), оператор $\hat{C}_n^m$ определен правилом

$$\hat{C}_n^m \Phi(t_1, \dots, t_n) = (\sqrt{2\pi})^{n-1} \sum_m \Phi^*(\omega_1, \dots, \omega, -\omega, \dots, -\omega),$$

$\Phi^*(\omega_1, \dots, \omega_n)$ – преобразование Фурье функции $\Phi(t_1, \dots, t_n)$, сумма берется по перестановкам аргументов группы (ω) с m аргументами группы $(-\omega)$. Число членов в сумме равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{m}$. Приведенны соотношения позволяют представить решение задачи о колебаниях осциллятора в виде

$$x(t) = \frac{P}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi P^2}{2} \right)^n \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^{n+m} \hat{C}_{2n+1}^m W_{(n)}(t_1, \dots, t_n) \exp[i\omega(2n-2m+1)t]. \quad (11)$$

Можно показать, что определенная этим выражением функция $x(t)$ является действительной, а представляющий решение задачи ряд сходится к дважды непрерывно дифференцируемой функции.

С помощью решения (11) можно вычислить энергетические потери осциллятора за цикл колебаний

$$\Delta N = P \int_0^T f(t) \dot{x}(t) dt,$$

где T – период возбуждающей колебания силы. Используя вид решения и выражение для функции $f(t)$ и, изменив порядок суммирования, получим

$$\Delta N = \frac{\pi P^2}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi P^2}{2} \right)^n \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^{n+m} (2n-2m+1) (\delta_{n+1,m} - \delta_{n,m}) \hat{C}_{2n+1}^m W_{(n)}(t_1, \dots, t_n),$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Выполнив суммирование по индексу m , и учитывая равенство

$$\overline{C_{2n+1}^{n+1} W_{(n)}} = \hat{C}_{2n+1}^n W_{(n)},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, будем иметь

$$\Delta N = \pi P^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi P^2}{2} \right)^n \operatorname{Im} \left[\hat{C}_{2n+1}^{n+1} W_{(n)}(t_1, \dots, t_n) \right], \quad (12)$$

$\operatorname{Im}[\dots]$ – обозначает мнимую часть выражения в скобках.

Вычислим приближенно потерю энергии осциллятора за цикл колебаний, учитывая только два члена в решении. Полагая в формуле (11) $n=0$ и $n=1$, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= P \sum_{n=0}^1 [A_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t + B_{2n+1} \cos(2n+1)\omega t], \\ A_1(\omega) &= \operatorname{Re}(W_1^*(\omega)) + \frac{3\pi P^2}{2} \operatorname{Re}(W_3^*(-\omega, \omega, \omega)), \\ B_1(\omega) &= -\operatorname{Im}(W_1^*(\omega)) - \frac{3\pi P^2}{2} \operatorname{Im}(W_3^*(-\omega, \omega, \omega)), \\ A_3(\omega) &= -\frac{\pi P^2}{2} \operatorname{Re}(W_3^*(\omega, \omega, \omega)), \quad B_3(\omega) = \frac{\pi P^2}{2} \operatorname{Im}(W_3^*(\omega, \omega, \omega)), \end{aligned} \quad (13)$$

где учитывали

$$W_n^*(\omega_1, \dots, \omega_n) = \operatorname{Re}(W_n^*(\omega_1, \dots, \omega_n)) - i \operatorname{Im}(W_n^*(\omega_1, \dots, \omega_n)).$$

Предполагая сепарабельность ядер наследственности

$$V_n^*(\omega_1, \dots, \omega_n) = a_n \prod_{k=1}^n V_1^*(\omega_k)$$

из рекуррентного соотношения (8) для нечетных n определим входящие в соотношение (13) функции в явном виде

$$W_3^*(\omega, \omega, \omega) = -\frac{a_3}{2\pi} W_1^*(3\omega) [W_1^{0*}(\omega)]^3, \quad (14)$$

$$W_3^*(-\omega, \omega, \omega) = -\frac{a_3}{2\pi} W_1^*(\omega) W_1^{0*}(\omega) |W_1^{0*}(\omega)|^2,$$

где $W_1^{0*}(\omega) = W_1^*(\omega) V_1^*(\omega)$.

Подставляя соотношение (14) в (13) получим выражения для коэффициентов гармоник, входящих в приближенное решение

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \operatorname{Re} \left[W_1^*(\omega) - \alpha_3 W_1^*(\omega) W_1^{0*}(\omega) |W_1^{0*}(\omega)|^2 \right], \\ B_1(\omega) &= \operatorname{Im} \left[W_1^*(\omega) - \alpha_3 W_1^*(\omega) W_1^{0*}(\omega) |W_1^{0*}(\omega)|^2 \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$A_3(\omega) = \frac{\alpha_3}{3} \operatorname{Re} \left[W_1^*(3\omega) (W_1^{0*}(\omega))^3 \right], \quad B_3(\omega) = \frac{\alpha_3}{3} \operatorname{Im} \left[W_1^*(3\omega) (W_1^{0*}(\omega))^3 \right], \quad \alpha_3 = \frac{3a_3 P^2}{4}.$$

Учитывая равенства (14) и (15), выражение для энергии диссипации, включающее две первые гармоники, при условии, сепарабельности функций влияния $V_n(t_1, \dots, t_n)$ принимает вид

$$\Delta N \approx -\pi P^2 B_1(\omega), \quad (16)$$

где $B_1(\omega) < 0$.

Среднюю накопленную энергию можно вычислить, усредняя по периоду сумму потенциальной U и кинетической E_k энергий [8]

$$N = \langle U + E_k \rangle,$$

где

$$U = \frac{x^2(t)}{2} + a_3 \frac{x^4(t)}{4} + \dots, \quad E_k = \frac{\dot{x}^2(t)}{2}.$$

Для достаточно малых амплитуд возмущения, учитывая $|a_3| < 1$, при вычислении U можно ограничиться первым членом в разложении.

Выполнив преобразования, аналогичные тем, которые использовались при получении выражения для энергетических потерь, и, проведя усреднение по периоду колебаний, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{x^2(t)}{2} \right\rangle &= \frac{P^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi P^2}{2} \right)^{n-1} \sum_{p_1+p_2=n-1} \sum_{m_1+m_2=n} \prod_{k=1}^2 \hat{C}_{2p_k+1}^{m_k} W_{2p_k+1}, \\ \left\langle \frac{\dot{x}^2(t)}{2} \right\rangle &= -\frac{(\omega P)^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi P^2}{2} \right)^{n-1} \sum_{p_1+p_2=n-1} \sum_{m_1+m_2=n} \prod_{k=1}^2 (2p_k - 2m_k + 1) \hat{C}_{2p_k+1}^{m_k} W_{2p_k+1}, \end{aligned} \quad (17)$$

где внутренние суммы берутся по целым неотрицательным решениям диофантовых уравнений. Учитывая в полученных выражениях вклады только первой и третьей гармоник (13), а также сепарабельность ядер $V_n(t_1, \dots, t_n)$ и формулы (14), получим выражения для средней накопленной энергии

$$N \approx \frac{P^2}{4} \left[(\omega_0^2 + \omega^2)(A_1^2 + B_1^2 + A_3^2 + B_3^2) + 8\omega^2(A_3^2 + B_3^2) \right], \quad (18)$$

где амплитуды гармоник определены выражениями (15).

Выбирая в качестве меры внутреннего трения величину [7],

$$Q^{-1} = \frac{\Delta N}{2\pi N},$$

получим в рассматриваемом приближении с учетом (16) и (18)

$$Q^{-1} = -\frac{-2B_1}{(\omega_0^2 + \omega^2)(A_1^2 + B_1^2 + A_3^2 + B_3^2) + 8\omega^2(A_3^2 + B_3^2)}. \quad (19)$$

Отметим – формула (19) определяет внутреннее трение при колебаниях линейного наследственного упругого осциллятора при $a_3 = 0$.

Полученное выражение для меры диссипации определяет не только частотную, но и амплитудную зависимость. Таким образом, полученные результаты можно использовать для феноменологического описания энергетических потерь при движении точечных дефектов и

дислокаций в твердых телах под действием механической вибрации [7, 8]. Возможность применения нелинейной теории вязкоупругости для описания амплитудной зависимости внутреннего трения отмечалось в монографии [7]. Вопрос о частотной зависимости внутреннего трения имеет весьма важное значение в материаловедении. Имеется значительное число экспериментальных результатов для различных материалов, а также теоретические разработки о связи частотной зависимости внутреннего трения с физическими механизмами релаксации. Установлено, что наиболее подходящими для описания экспериментальных данных являются слабосингулярные ядра наследственности.

Рассмотрим частотную зависимость внутреннего трения для функций релаксации Ржаницына и Работнова. В безразмерных переменных они имеют вид

$$V_1(t) = \delta(t) - vt^{\gamma-1} \frac{e^{-t}}{\Gamma(\gamma)}, \quad V_1(t) = \delta(t) - vt^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{\gamma n}}{\Gamma(\gamma(1+n))},$$

где $0 < \gamma \leq 1$, $0 < v < 1$, $\delta(t)$ – дельта-функция, $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция. Фурье-образы ядер решения имеют вид: для ядра Ржаницына

$$W_1^*(\omega) = B_r^{-1}(\omega) \delta^\gamma \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \delta^\gamma - v \omega_0^2 \cos \gamma \varphi - i v \omega_0^2 \sin \gamma \varphi \right],$$

$$\varphi = \arctg \omega, \quad \delta = \sqrt{1 + \omega^2}, \quad B_r(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2) \left[\delta^{2\gamma} + v^2 \omega_0^4 - 2v \omega_0^2 \delta^\gamma \cos \gamma \varphi \right];$$

для функции Работнова

$$W_1^*(\omega) = B_R^{-1}(\omega) \left[\omega^{2\gamma} (\omega_0^2 - \omega^2) + (v \omega_0^2 - \omega^2) + \omega^\gamma \left[(2 - v) \omega_0^2 - 2 \omega^2 \right] \cdot \cos \frac{\pi \gamma}{2} - i v \omega^{2+\gamma} \sin \frac{\pi \gamma}{2} \right],$$

$$B_R(\omega) = \omega^{2\gamma} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + ((1 - v) \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2 \omega^\gamma (\omega_0^2 - \omega^2) ((1 - v) \omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \frac{\pi \gamma}{2}.$$

Заключение

В настоящей работе построен метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих нелинейные аналитические функционалы, моделирующие состояния ряда технических устройств современной электроники, используемых в нелинейной оптике для описания поведения диэлектриков при прохождении интенсивных электромагнитных волн, описывающих ползучесть полимеров и некоторых сплавов в условиях значительных механических нагрузений. В основу предлагаемого метода положено представление решения функционального уравнения в виде ряда полилинейных функционалов возрастающего порядка. Получены соотношения между ядрами функционалов, представляющих решение, и ядрами заданного функционала.

Развитый в работе метод применен к построению стационарного решения уравнения движения нелинейного наследственно-упругого осциллятора, в котором функционал, описывающий эффекты наследственности, представлен рядом Вольтерра. Получено выражение для внутреннего трения осциллятора, описывающее его частотную и амплитудную зависимости. Установлено в частотной зависимости диссипации энергии наличие пиков и провалов. Указанные эффекты не обнаруживаются при применении к решению уравнения методов осреднения.

Отметим, что работа над обобщением представленного метода на случай системы дифференциальных уравнений с нелинейными аналитическими функционалами является перспективным направлением исследований.

Литература

1. Кабанов Д. А. Функциональные устройства с распределенными параметрами. – М. : Сов. Радио. 1979. – 336 с.
2. Нелинейные электромагнитные волны / Под ред. П. Усленди. – М. : Мир, 1983. – 312 с.
3. Бломберген Н. Нелинейная оптика. – М. : Мир, 1966. – 424 с.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
5. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязко-упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970. 280 с.
6. Бырдин А. П. Метод рядов Вольтерра в динамических задачах нелинейной наследственной упругости / А. П. Бырдин, М. И. Розовский // Изв. АН Арм. ССР. – 1985. Т. 38, № 5. – С. 49–56.
7. Постников В. С. Внутреннее трение в металлах. – М. : Metallurgia, 1969. – 332 с.
8. Мешков С. И. Вязко-упругие свойства металлов. – М. : Metallurgia, 1974. – 192 с.

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В. Б. Васильев, Л. А. Ковалева, Ш. Х. Кутаиба, О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. В работе изучается предельное поведение решения модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения. Сначала уравнение рассматривается в плоском секторе с дополнительным интегральным условием. В этом случае, используя формулу для общего решения, предельное поведение изучается предполагая, что угол сектора стремится к нулю. Установлено, что функция в граничном условии не может быть произвольной, а должна удовлетворять определенному функциональному сингулярному интегральному уравнению. Затем рассмотрен случай четырехгранной конической канонической трехмерной особой области с двумя параметрами. Показано, что решение такой краевой задачи может иметь предел по конечным значениям параметров в соответствующем пространстве Соболева – Слободецкого, если граничная функция является решением специального функционального сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: асимптотика, интегральное условие, краевая задача, эллиптическое псевдодифференциальное уравнение.

1. Большое количество работ [1–3] посвящено построению и развитию теории эллиптических псевдодифференциальных операторов и уравнений на негладких многообразиях или на многообразиях с негладкими границами. Сам термин «теория» означает присутствие в этих исследованиях теорем фредгольмовости и теорем об индексе.

Используя локальный принцип и изучая свойства обратимости модельных операторов, в так называемых канонических областях, мы тем самым исследуем фредгольмовы свойства общего псевдодифференциального оператора. Отметим, что различные модельные операторы и канонические области порождают различные теории Фредгольма.

Под каноническими областями, как обычно, будем понимать либо все пространство $\mathbb{R}^m$ или полупространство $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, либо заданный конус в $\mathbb{R}^m$.

Пусть C выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^m$ не содержащий целой прямой. Рассмотрим в нем псевдодифференциальный оператор вида

$$(Au)(x) = \int \int_{C \times \mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) d\xi dy, \quad x \in C,$$

и модельное уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad (1)$$

и потребуем, чтобы символ $A(\xi)$ оператора A удовлетворял условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Стоит отметить, что в [6] был развит новый подход к изучению псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладкой границей, основанный на получении условий обратимости модельного псевдодифференциального оператора A или условий однозначной разрешимости модельного уравнения (1) в соответствующих функциональных пространствах.

Чтобы описать эти условия было введено [6] понятие волновой факторизации для эллиптического символа.

2. Рассмотрим двумерный случай. Уравнение (1) будем изучать в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^a)$. Как известно, [6] под символом $\mathfrak{a}$ понимается индекс волновой факторизации. Пусть для него выполнено условие

$$1/2 < \varkappa - s < 3/2,$$

где s – показатель пространства Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^a)$ [6, 10] и плоский сектор имеет вид

$$C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > a |x_1|, a > 0\}.$$

Для простоты, положим $\nu \equiv 0$ в (1). Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [6], то можно показать [7] что общее решение уравнения (1) в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^a)$ в образах Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi) = & \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_\#(\xi_1, \xi_2)} + \\ & + A_\#^{-1}(\xi_1, \xi_2) \left(\text{v.p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - \text{v.p.} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} \right), \end{aligned}$$

где c_0 – произвольная функция из $H^{s-\varkappa+1/2}(\mathbb{R})$.

Обозначим

$$\text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2), \quad \text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta} \equiv \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2). \quad (3)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = & \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_\#(\xi_1, \xi_2)} \equiv \\ & \equiv \frac{\tilde{c}(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{d}(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_\#(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{c}(\xi_1 + a\xi_2) \equiv \tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{d}_0(\xi_1 + a\xi_2)$, $\tilde{d}(\xi_1 - a\xi_2) \equiv \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_1 - a\xi_2)$.

Пусть нам известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 \equiv g(x_1). \quad (5)$$

Для преобразования Фурье означает $\tilde{u}(\xi_1, 0) = \tilde{g}(\xi)$ и согласно формуле (3) имеем

$$\frac{\tilde{c}_0(\xi_1)}{A_\#(\xi_1, 0)} = \tilde{g}(\xi_1).$$

Следовательно, формально, мы можем найти функцию $\tilde{c}_0(\xi_1) = A_\#(\xi_1, 0)\tilde{g}(\xi_1)$. Затем, используя (3), найти $\tilde{d}_0(\xi_1)$. Таким образом, формула (4) дает нам решение уравнения (1). Окончательно решение уравнения (1) при условии (5) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi_1, \xi_2) = & \frac{A_\#(\xi_1 + a\xi_2, 0)\tilde{g}(\xi_1 + a\xi_2) + A_\#(\xi_1 - a\xi_2, 0)\tilde{g}(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_\#(\xi_1, \xi_2)} + \\ & + \frac{1}{2A_\#(\xi_1, \xi_2)} \text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\#(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - \frac{1}{2A_\#(\xi_1, \xi_2)} \text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\#(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $a_\#(t_1, t_2) \equiv A_\#\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right)$, $\tilde{U}(t_1, t_2) \equiv \tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1-t_2}{2a}\right)$, запишем

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t_1, t_2) = & \frac{A_\#(t_1, 0)\tilde{g}(t_1) + A_\#(t_2, 0)\tilde{g}(t_2)}{2a_\#(t_1, t_2)} + \\ & + \frac{1}{2a_\#(t_1, t_2)} \text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\#(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1 - \eta} - \frac{1}{2a_\#(t_1, t_2)} \text{v.p.} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_\#(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2 - \eta}. \end{aligned}$$

Устремляя $a \rightarrow +\infty$, обозначая $A_{\pm}(t, 0)\tilde{g}(t) \equiv G(t)$ и $\lim_{a \rightarrow +\infty} a_{\pm}(t_1, t_2) \equiv h(t_1, t_2)$ получим следующее соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{u}\left(\frac{t_1+t_2}{2}, 0\right) &= \tilde{U}(t_1, t_2) = \frac{A_{\pm}(t_1, 0)\tilde{g}(t_1) + A_{\pm}(t_2, 0)\tilde{g}(t_2)}{2h(t_1, t_2)} + \\ &+ \frac{1}{2h(t_1, t_2)} v.p. \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\pm}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_1 - \eta} - \frac{1}{2h(t_1, t_2)} v.p. \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\pm}(\eta, 0)\tilde{g}(\eta)d\eta}{t_2 - \eta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Окончательно, согласно условию (5), имеем

$$2h(t_1, t_2)\tilde{g}\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) = G(t_1) + G(t_2) + (SG)(t_1) - (SG)(t_2), \quad (7)$$

где

$$(SG)(t) = v.p. \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\eta)d\eta}{t - \eta}.$$

Окончательный результат для плоского случая формулирует следующая

Теорема 1. Если символ $A(\xi_1, \xi_2)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^a при достаточно больших a , то предел (6) при $a \rightarrow +\infty$ существует, краевая задача (1), (5) разрешима, если имеет место условие (7).

3. Перейдем к многомерному случаю. Пусть C_+^{ab} – четырехгранная коническая каноническая область трехмерного пространства

$$C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_3 > a|x_1| + b|x_2|, \quad a, b > 0\}.$$

Обозначим через $\tilde{A}(\xi)$ символ псевдодифференциального оператора A , причем он не зависит от x и удовлетворяет условиям (2). Далее нам понадобятся некоторые определения из [8].

Радиальной трубчатой областью над конусом C_+^{ab} называется область следующего вида

$$T(C_+^{ab}) \equiv \{z \in \mathbb{C}^3 : z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad y \in C_+^{ab}\}.$$

Сопряженным конусом C_+^{*ab} называется такой конус, для всех точек которого выполнено

$$x \cdot y > 0, \quad \forall y \in C_+^{ab},$$

где $x \cdot y$ есть скалярное произведение для x и y .

Согласно [4] определим волновую факторизацию символа.

Определение. Волновой факторизацией символа $\tilde{A}(\xi)$ относительно конуса C_+^{ab} называется его представление в виде

$$\tilde{A}(\xi) = \tilde{A}_{\pm}(\xi)\tilde{A}_{\mp}(\xi),$$

где $\tilde{A}_{\pm}(\xi)$, $\tilde{A}_{\mp}(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\tilde{A}_{\pm}(\xi)$, $\tilde{A}_{\mp}(\xi)$ определены всюду, за исключением точек $\left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \xi_3 = \frac{1}{2a}|\xi_1| + \frac{1}{2b}|\xi_2|\right\}_*$;

2) $\tilde{A}_{\pm}(\xi)$, $\tilde{A}_{\mp}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальной области $T(C_+^{ab})$,

$T(-C_+^{*ab})$ соответственно, которые удовлетворяют оценкам

$$|A_{\pm}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm \alpha},$$

$$|A_{\mp}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leq c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - \alpha^*)}, \quad \forall \tau \in C_+^{*ab}.$$

Число α называется индексом волновой факторизации.

Замечание. Всюду ниже мы предполагаем, что такая волновая факторизация существует.

Как и выше, для многомерного случая уравнение (1) рассматриваем в аналогичном пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(C_+^{ab})$ [4]. Для упрощения построения исследуем одномерную краевую задачу

$$(Au)(x) = 0 \quad x \in C_+^{ab}. \quad (8)$$

Для описания общего решения уравнения (1) в случае, когда $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$ будем использовать результаты, полученные в [5]. Далее введем следующие сингулярные интегральные операторы [9]

$$(S_1 u)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\tau, \xi_2, \xi_3) d\tau}{\xi_1 - \tau},$$

$$(S_2 u)(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v.p. \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi_1, \eta, \xi_3) d\eta}{\xi_2 - \eta}.$$

и пусть

$$A_{\neq}(\xi) \tilde{u}(\xi) = \tilde{C}_1(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \tilde{C}_2(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \\ + \tilde{C}_3(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \tilde{C}_4(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) &= \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3); \\ \tilde{C}_2(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) &= \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) - \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) - (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 - a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3); \\ \tilde{C}_3(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) &= \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) + \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3) - (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 - b\xi_3); \\ \tilde{C}_4(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) &= \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3) + (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1 + a\xi_3, \xi_2 + b\xi_3). \end{aligned}$$

Чтобы однозначно определить произвольную функцию $c_0(\xi_1, \xi_2)$ потребуется некоторое дополнительное условие. Предположим, что нам известна функция $\tilde{u}(\xi_1, \xi_2, 0)$, что в свою очередь означает, что известен интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv g(x_1, x_2), \quad (10)$$

для преобразования Фурье это дает равенство

$$\tilde{u}(\xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{g}(\xi_1, \xi_2). \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9) мы можем получить аналогичные слагаемые. Действительно

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\neq}(\xi) \tilde{u}(\xi) &= \sum_{k=1}^4 \tilde{C}_k(\xi_1, \xi_2) = \\ &= \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \\ &+ \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) - (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \\
& + \frac{1}{4} \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} (S_1 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{2} (S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) + (S_1 S_2 \tilde{c}_0)(\xi_1, \xi_2) = \tilde{c}_0(\xi_1, \xi_2).
\end{aligned}$$

Подставляя в последний результат условие (10) получим

$$\tilde{A}_\#(\xi', 0) \tilde{u}(\xi', 0) = \tilde{c}_0(\xi'), \xi' - (\xi_1, \xi_2).$$

Следовательно

$$\tilde{c}_0(\xi') = \tilde{A}_\#(\xi', 0) \tilde{g}(\xi'). \quad (12)$$

Теорема 2. Пусть $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, $g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда решение краевой задачи (8), (10) дается формулой (9), где $c_0(x_1, x_2)$ определяется из формулы (12).

4. В предыдущем разделе конус определялся двумя параметрами a и b . Особый интерес представляют ситуации, когда один их параметров или оба устремляются к 0 или $+\infty$. Здесь стоит отметить, что случай $a, b \rightarrow 0$ содержится в книге [10] и соответствует полупространству, случаи $a \rightarrow 0$, $b = \text{const}$ и $a = \text{const}$, $b \rightarrow 0$ описаны в [4]. Здесь рассматривается случай $a \rightarrow +\infty$, $b = \text{const}$, который будет аналогичен случаю $a = \text{const}$, $b \rightarrow +\infty$.

Исходной точкой является равенство (9). Мы применяем замену переменных $\xi_1 - a\xi_3 = t_1$, $\xi_1 + a\xi_3 = t_3$, из которой находим $\xi_1 = \frac{t_3 + t_1}{2}$, $\xi_3 = \frac{t_3 - t_1}{2a}$. В новых переменных t_1 , ξ_2 , t_3 с использованием условия (11) мы можем определить произвольную функцию $\tilde{c}_0$ по формуле (12). Теперь мы переписываем формулу (9) в новых переменных t_1 , ξ_2 , t_3 и получаем

$$\begin{aligned}
& A_\# \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \xi_2, \frac{t_3 - t_1}{2a} \right) \tilde{u} \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \xi_2, \frac{t_3 - t_1}{2a} \right) = \tilde{C}_1 \left(t_1, \xi_2 - b \frac{t_3 - t_1}{2a} \right) + \\
& + \tilde{C}_2 \left(t_1, \xi_2 + b \frac{t_3 - t_1}{2a} \right) + \tilde{C}_3 \left(t_3, \xi_2 - b \frac{t_3 - t_1}{2a} \right) + \tilde{C}_4 \left(t_3, \xi_2 + b \frac{t_3 - t_1}{2a} \right), \quad (13)
\end{aligned}$$

Устремляя a к $+\infty$, мы приходим к соотношению

$$A_\# \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \xi_2, 0 \right) \tilde{u} \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \xi_2, 0 \right) = \tilde{C}_1(t_1, \xi_2) + \tilde{C}_2(t_1, \xi_2) + \tilde{C}_3(t_3, \xi_2) + \tilde{C}_4(t_3, \xi_2),$$

Вычисления дают следующее:

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}_1(t_1, \xi_2) + \tilde{C}_2(t_1, \xi_2) + \tilde{C}_3(t_3, \xi_2) + \tilde{C}_4(t_3, \xi_2) = \\
& = \frac{\tilde{c}_0(t_1, \xi_2) + \tilde{c}_0(t_3, \xi_2)}{2} - (S_1 \tilde{c}_0)(t_1, \xi_2) + (S_1 \tilde{c}_0)(t_3, \xi_2).
\end{aligned}$$

Учитывая условие (11), формулу (12) в равенстве (13) и вводя новое обозначение

$$\tilde{A}_\#(\xi_1, \xi_2, 0) \tilde{g}(\xi_1, \xi_2) \equiv h(\xi_1, \xi_2)$$

мы приходим к следующему равенству (уравнению) с параметром ξ_2

$$h \left(\frac{t_2 + t_1}{2}, \xi_2 \right) = \frac{h(t_1, \xi_2) + h(t_3, \xi_2)}{2} - (S_1 h)(t_1, \xi_2) + (S_1 h)(t_3, \xi_2). \quad (14)$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно конуса C_+^{ab} с индексом $\varkappa$, таким, что $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, для достаточно больших a , то единственное решение краевой задачи (8), (10) имеет предел при $a \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда граничная функция $g \in H^{s+1/2}(\mathbb{R}^2)$ является решением уравнения (14).

Литература

1. *Egorov Ju. V. Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications* / Ju. V. Egorov, B.-W. Schulze. – Birkhauser, Basel, 1997.
2. *Elliptic Theory on Singular Manifolds* / V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B.-W. Schulze and B. Yu. Sternin; Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
3. *Schulze B.-W. Differential Equations on Singular Manifolds* / B.-W. Schulze, B. Sternin, V. Shatalov; Semiclassical Theory and Operator Algebras, Wiley, Berlin, 1998.
4. *Vasilyev V. B. On Certain 3-Dimensional Limit Boundary Value Problems* / V. B. Vasilyev // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V. 41, pages 917–925.
5. *Vasilyev V. B. Pseudo-Differential equations and conical potentials: 2-dimensional case* / V. B. Vasilyev // Opusc. Math. – 2019 – V. 39, P. 109–124.
6. *Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи*. М. : КомКнига, 2010. – 135 с.
7. *Васильев В. Б. Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе* / В. Б. Васильев // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. – 2016. – Т. 16, № 3, С. 3–14.
8. *Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных* / В. С. Владимиров; М.: Наука, 1964. – 412 с.
9. *Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения* / Н. И. Мусхелишвили; М. : Наука, 1968. – 513 с.
10. *Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений* / Г. И. Эскин; М. : Наука, 1973. – 232 с.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Г. А. Виноградова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается краевая дифференциальная задача с сингулярным положительно определенным оператором, которая решается вариационным методом. Решение вариационной задачи ищется в весовом энергетическом пространстве. Имеются проблемы сходимости приближенного решения к точному решению. Для решения этих проблем строится модифицированная задача, аппроксимирующая сингулярную задачу.

Ключевые слова: сингулярная краевая задача, весовые функциональные пространства, энергетические пространства, вариационная задача, вариационный метод, регуляризация задачи.

Рассмотрим краевую задачу для сингулярного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} Au(x) &= -\frac{1}{x^k} \frac{d}{dx} (x^k p(x) u'(x)) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u'(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k > 0$, $p(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $p(x) \geq p_0 > 0$.

Введем весовое гильбертово пространство $L_{2,k}(0,1)$, которое является пополнением множества четных, бесконечно дифференцируемых, финитных на отрезке $[-1,1]$ функций по норме $\|g\|^2 = \int_0^1 x^k g^2(x) dx$. Скалярное произведение в нем определяется по формуле

$$(u, v) = \int_0^1 x^k u(x) v(x) dx.$$

Область определения оператора $D(A)$ состоит из множества функций дважды непрерывно дифференцируемых на интервале $(0,1)$, непрерывных на отрезке $[0,1]$, имеющих непрерывную производную на полуинтервале $[0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям $u'(0) = 0$ и $u(1) = 0$.

Оператор задачи A является симметричным и положительно определенным в пространстве $L_{2,k}(0,1)$. Как следует из вариационного метода, теория которого изложена в [1], решение задачи сводится к проблеме минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) = \int_0^1 x^k p(x) (u'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 x^k f(x) u(x) dx \quad (2)$$

на энергетическом пространстве H_A . Энергетическое пространство является пополнением $D(A)$ по норме $\|u\|_A = (Au, u)^{1/2}$. Как известно из теории ([1]), решение задачи (1) доставляет минимум функционалу (2), и функция, доставляющая минимум функционалу (2), принадлежащая области определения оператора A , является решением задачи (1). Если функция, доставляющая минимум функционалу, не принадлежит $D(A)$, то такую функцию называют обобщенным решением задачи (1).

Как отмечалось в работах [2, 3], в случае $k \in (0,1)$ пространство H_A вложено в пространство непрерывных функций. Решение задачи о минимуме функционала методом Ритца приводит к тому, что приближенное решение равномерно стремится к точному решению на отрезке $[0,1]$.

В случае $k \geq 1$ приближенное решение стремится к точному решению в энергетическом пространстве H_A и равномерно на любом отрезке $[h,1]$, где $h > 0$. Граничное условие $u'(0) = 0$

не обязательно выполняется, более того, в окрестности нуля приближенное решение может быть неограниченным.

Заметим, что для функции $u \in D(A)$, удовлетворяющей условию $u'(0) = 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} Au(x) &= -\frac{1}{x^k} \frac{d}{dx} (x^k p(x) u'(x)) = -\frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) - \frac{kp(x)}{x} u'(x) = \\ &= -\frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) - \frac{k(p(x) u'(x) - p(0) u'(0))}{x} = -\frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) - k \frac{d}{dt} (p(t) u'(t)) \Big|_{t=\theta x}, \end{aligned}$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Определим оператор $Bu(x) = -(k+1) \frac{d}{dx} (p(x) u'(x))$, $x \in (0, h)$. Заметим, что при $x \in (0, h)$

$Au(x) - Bu(x) = k \left(\frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) - \frac{d}{dt} (p(t) u'(t)) \Big|_{t=\theta x} \right)$ является бесконечно малой величиной при $h \rightarrow 0$.

Таким образом, оператор B аппроксимирует оператор A на отрезке $[0, h]$.

Рассмотрим новую задачу

$$\begin{aligned} Bu(x) &= Au(x) = f(x), \quad x \in (h, 1) \\ Bu(x) &= f(x), \quad x \in (0, h) \\ u'(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $k \geq 1$.

В [4] был рассмотрен случай $k > 1$. В настоящей работе рассматривается случай $k = 1$, ранее опущенный.

На области определения оператора A определим новое скалярное произведение и норму по формулам

$$(u, v)_* = h \int_0^h u(x) v(x) dx + \int_h^1 x u(x) v(x) dx, \quad \|u\|_*^2 = h \int_0^h u^2(x) dx + \int_h^1 x u^2(x) dx. \tag{4}$$

Пополним множество $D(A)$ по норме $\|\cdot\|_*$, полученное пространство обозначим H_B .

Теорема 1. Оператор B является симметричным и положительно определенным.

Доказательство. В самом деле, используя формулу интегрирования по частям для функций u, v из $D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} (Bu, v) &= -h \int_0^h \frac{d}{dx} (p(x) u'(x)) v(x) dx + \int_h^1 x Au(x) v(x) dx = -h \int_0^h (p(x) u'(x))' v(x) dx - \int_h^1 (x u'(x))' v(x) dx = \\ &= -hp(h) u'(h) v(h) + hp(0) u'(0) v(0) + h \int_0^h p(x) u'(x) v'(x) dx - p(1) u'(1) v(1) + hp(h) u'(h) v(h) + \\ &+ \int_h^1 x p(x) u'(x) v'(x) dx = h \int_0^h p(x) u'(x) v'(x) dx + \int_h^1 x p(x) u'(x) v'(x) dx = (u, Bv). \end{aligned}$$

То есть оператор B является симметричным.

Если $u \in D(A)$, и $u(1) = 0$, имеем $u(x) = -\int_x^1 u'(t) dt = -\int_x^1 t^{-1/2} t^{1/2} u'(t) dt$. Тогда в силу неравенства

Гельдера получаем

$$\begin{aligned} u^2(x) &\leq \int_x^1 t^{-1} dt \cdot \int_x^1 t (u'(t))^2 dt = -\ln x \int_x^1 t (u'(t))^2 dt \leq -\ln x \int_h^1 t (u'(t))^2 dt \leq \\ &\leq \frac{-\ln x}{p_0} \left(h \int_0^h p(x) (u'(x))^2 dx + \int_h^1 x p(x) (u'(x))^2 dx \right) = \frac{-\ln x}{p_0} (Bu, u), \text{ если } x > h, \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned}
 u^2(x) &\leq \int_x^h dt \cdot \int_x^h (u'(t))^2 dt - \ln h \int_h^1 x(u'(x))^2 dx = (h-x) \int_x^h (u'(t))^2 dt - \ln h \int_h^1 x(u'(x))^2 dx \leq \\
 &\leq h \int_x^h (u'(t))^2 dt - \ln h \int_h^1 x(u'(x))^2 dx \leq \frac{-\ln h}{p_0} \left(h^k \int_0^h p(x)(u'(x))^2 dx + \int_h^1 xp(x)(u'(x))^2 dx \right) = \\
 &= \frac{-\ln h}{p_0} (Bu, u), \text{ если } x \in [0, h].
 \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя последние неравенства по отрезкам $[0, h]$ и $[h, 1]$, получаем

$$\|u\|_*^2 = h \int_0^h u^2(x) dx + \int_h^1 xu^2(x) dx \leq \frac{-h \ln h}{p_0} (Bu, u) \int_0^h dx - \frac{1}{p_0} (Bu, u) \int_h^1 x \ln x dx = c(Bu, u).$$

Последнее означает, что оператор B является положительно определенным. Теорема доказана.

Теорема 2. Пространство H_B вложено в пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 было показано, что для функций из области определения оператора A (см. неравенства (5), (6)) справедливо неравенство

$$u^2(x) \leq \frac{-\ln h}{p_0} (Bu, u) \quad \text{для всех } x \in [0, 1]. \quad \text{Отсюда следует, что}$$

$$\max_{x \in [0, 1]} |u(x)| \leq \sqrt{\frac{-h \ln h}{p_0} (Bu, u)} = \sqrt{\frac{-h \ln h}{p_0}} \|u\|_*. \text{ То есть из сходимости в энергетическом пространстве}$$

H_B следует равномерная сходимость. Теорема доказана.

Задача (3) сводится к проблеме о минимуме функционала

$$\Phi(u) = \int_h^1 x(p(x)u'(x))^2 dx - 2 \int_h^1 xf(x)u(x) dx + h \int_0^h (p(x)u'(x))^2 dx - h \int_0^h f(x)u(x) dx \quad (7)$$

и имеет единственное решение в энергетическом пространстве H_B .

Литература

1. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
2. Виноградова Г. А. О решении сингулярной задачи вариационным методом // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа. – Воронеж : Издательский дом ВГУ. – 2015.
3. Виноградова Г. А. О решении сингулярной задачи вариационным методом // Вестник факультета ПММ. – 2015. – Вып. 10. – С. 39–42.
4. Виноградова Г. А. Регуляризация вариационной задачи для сингулярного оператора // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : Сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации». – 2020. – С. 52–55.

К СПЕКТРАЛЬНЫМ СВОЙСТВАМ ОДНОГО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Г. В. Гаркавенко¹, Н. Б. Ускова²

¹Воронежский государственный педагогический университет,

²Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе рассматривается дифференциальный оператор первого порядка, возмущенный оператором дробного интегрирования Римана-Лиувилля на отрезке $[0;1]$ с периодическими краевыми условиями. Методом исследования служит метод подобных операторов. Описываются спектральные свойства изучаемого оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор первого порядка, спектр, метод подобных операторов, дробный интеграл Римана-Лиувилля.

Применение преобразования подобия для исследования различных классов возмущенных операторов используется достаточно давно. Оно берет свое начало с приведения матриц к диагональному виду [1]. Считается, что впервые эта идея по отношению к операторам была высказана К. О. Фридрихсом (метод Фридрихса подобных операторов) для операторов с непрерывным спектром [2, 3]. Хотя есть мнение, что первоначально идея принадлежала русскому математику Летникову А. В. [4]. Полный обзор по истории и современному состоянию этой теории можно найти в [5].

Метод подобных операторов, предложенный А. Г. Баскаковым, также использует преобразование подобия исследуемого возмущенного оператора в более просто устроенный оператор. Такой, что его спектральные свойства легко изучать, потому что они близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Общую схему метода подобных операторов можно посмотреть в [6–9]. Кроме работ Фридрихса, метод подобных операторов опирается на метод Тернера подобных операторов [10], а также метод кинематического подобия Ляпунова [11] и замену Крылова-Боголюбова [12].

В связи с интересом в последнее десятилетие к дифференциальным операторам с инволюцией [13–20] потребовалась модификация метода подобных операторов, предназначенная специально для исследования нормальных линейных замкнутых операторов с дискретным спектром, собственные значения которых «не разбегаются». В работах [21, 22] именно такая модификация и была разработана, причем более общий ее вариант в [21], а максимально приспособленный под дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией – в [22]. Потом возник вопрос, для каких еще классов возмущенных дифференциальных операторов данная модификация применима. Один из таких типов операторов и рассматривается в данной работе. Отметим, что это не единственный пример применения указанной модификации (см., например, [23, 24]).

Пусть $\mathcal{H} = L_2[0,1]$ – гильбертово пространство измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ и суммируемых с квадратом модуля (классов эквивалентности) функций. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ задается формулой

$$(x, y) = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

и норма $\|x\|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$ порождается этим скалярным произведением. Через $W_2^1[0,1]$ обозначено пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из $\mathcal{H}$ с производными из $\mathcal{H}$.

Символом $\text{End}\mathcal{H}$ обозначим банахово пространство всех линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой $\|X\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$, $X \in \text{End}\mathcal{H}$, а символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – идеал операторов Гильберта-Шмидта из $\text{End}\mathcal{H}$. Свойства идеала $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ можно найти в [10, 25].

В $\mathcal{H}$ рассмотрим интегро-дифференциальный оператор $L : D(L) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида

$$(Ly)(t) = \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x) dx, \quad t \in [0,1], \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.5,$$

$$D(L) = \{y \in W_2^1[0,1], y(0) = y(1)\}.$$

Здесь через $\Gamma(\alpha)$ обозначена гамма-функция [26, 27].

Представим оператор L в виде $L = A - B$, где $A = d/dt$, $D(A) = D(L)$, и

$$(By)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} y(x) dx, \quad t \in [0,1], \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.5.$$

Оператор B обычно называется дробным интегралом Римана-Лиувилля (см. [26, 27]). Он ограничен на $\mathcal{H}$. Отметим, что обычно требуется, чтобы функция y была абсолютно интегрируема на $[0,1]$, но в рассматриваемом случае ($\alpha > 0.5$) этого условия не требуется. Оператор B является интегральным оператором с суммируемым с квадратом на $[0,1] \times [0,1]$ ядром и нормой Гильберта-Шмидта

$$\|B\|_2 \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} ((2\alpha-1)2\alpha)^{-1/2}.$$

Введем обозначения

$$b_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} e^{i2\pi j(x-t)} dx dt.$$

Рассмотрим невозмущенный оператор

$$A = \frac{d}{dx}, \quad A : D(A) = D(L) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Спектральные характеристики оператора A известны. Числа $\lambda_n = i2\pi n / \omega$, $n \in \mathbb{Z}$, являются его простыми изолированными собственными значениями, отвечающими собственным векторам – функциям $e_n(t) = e^{\lambda_n t} = e^{i2\pi n t / \omega}$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Соответствующие спектральные проекторы P_n , $n \in \mathbb{Z}$, действуют по формуле $P_n x = (x, e_n) e_n = \hat{x}(n) e_n$, где $\hat{x}(n)$ – n -й коэффициент Фурье в разложении функции x . Обозначим $P_{(n)} = \sum_{|i| \leq n} P_i$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

С помощью [23, Теорема 5.3] и [24, Теорема 1.1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть оператор $B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ таков, что выполнено условие

$$\frac{4\pi \|B\|_2}{\omega} < 1. \quad (1)$$

Тогда оператор L подобен оператору

$$A - \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X_* P_i = A - Y,$$

где оператор $Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ – диагональный, а оператор $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов (см. [24, формула (5)]) и это решение может быть найдено методом итераций, отправляясь от $X_{(1)} = B$.

Выполнение условия (1) теоремы 1 нельзя гарантировать всегда. Поэтому также удобно иметь теорему, условия которой не предполагают малость величины $\|B\|_2$ или хорошую отделенность собственных значений оператора A .

Из [24, Теоремы 1.2 и 5.7] вытекает

Теорема 2. Существует такое целое число $k \geq 0$, что оператор L подобен оператору блочно-диагонального вида

$$A - P_{(n)} X_* P_{(n)} - \sum_{|i| > n} P_i X_* P_i = A - \tilde{B},$$

где $X_* \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ есть решение нелинейного операторного уравнения метода подобных операторов. Имеет место равенство

$$L(I + U) = (I + U)(A - \tilde{B}),$$

где $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Теоремы 1 и 2 позволяют выразить спектральные характеристики оператора L через спектральные характеристики оператора $A - \tilde{B}$. Например, получить асимптотические формулы для собственных значений и собственных векторов, доказать равносходимость спектральных разложений и выписать вид группы операторов, генератором которой является исследуемый оператор L . Соответствующие результаты, полученные с помощью метода подобных операторов для дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и периодическими краевыми условиями и для оператора Дирака с потенциалом общего вида и краевыми условиями Дирихле приведены в [26–28]. Заметим также, что так как возмущение B в данной задаче ограничено, то результаты, касающиеся группы операторов, можно получить из общей теории возмущенных полугрупп (групп) операторов (см. [29, 32]), не прибегая к методу подобных операторов.

Теорема 3. Для собственных значений оператора L имеют место асимптотические формулы

$$\tilde{\lambda}_n = i2\pi n - b_n + \beta_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| > k,$$

где последовательность $(\beta_n, n \in \mathbb{Z})$ суммируема. Соответствующие собственные векторы $\tilde{e}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > k$, $\tilde{e}_n = (I + U)e_n$, $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, образуют базис Бари в $\mathcal{H}$ и

$$\sum_{|n| > k} \|\tilde{e}_n - e_n\|_2^2 < \infty.$$

Теорема 4. Имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{|j| \leq n} P_j - \tilde{P}_{(k)} - \sum_{|j|=k+1}^n \tilde{P}_j \right\|_2 = 0.$$

Теорема 5. Оператор L является генератором сильно непрерывной операторной группы $\tilde{T} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End} \mathcal{H}$. Группа $\tilde{T} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End} \mathcal{H}$ подобна группе $T : \mathbb{R} \rightarrow \text{End} \mathcal{H}$ вида

$$T(t) = \sum_{|n| > k} e^{i\tilde{\lambda}_n t} P_n + e^{i(A - \tilde{B})_{(k)} t} P_{(k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $(A - \tilde{B})_{(k)}$ есть сужение оператора $A - \tilde{B}$ на образ проектора $\tilde{P}_{(k)}$.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №19-01-00-732.

Литература

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.
2. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. Фридрихс. – М. : Мир, 1968. – 232 с.
3. Friedrichs K. O. Lectures on advanced ordinary differential equations. Notes by P. Berg, W. Hirsch, P. Treuenfels / K. O. Friedrichs. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1965. – 207 p.

4. Историко-математические исследования. Выпуск 5 / сост. Г. Ф. Рыбкин, А. П. Юшкевич. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 472 с.
5. Ситник С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – М. : Физматлит, 2019. – 224 с.
6. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. – 164 с.
7. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 3–32.
8. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 3–28.
9. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, Д. М. Поляков // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 1. – С. 3–47.
10. Данфорд Н. Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3 / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : Мир, 1974. – 662 с.
11. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
12. Баскаков А. Г. Об абстрактном аналоге преобразования Крылова-Боголюбова в теории возмущенных линейных операторов / А. Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. – 1999. – Т. 33, № 2. – С. 76–80.
13. Kopzhassarova A. A. Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with an involution / A. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, A. M. Sarsenbi // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – Article ID 590781.
14. Cabada A. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions / A. Cabada, A. F. Tojo // J. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol. 412. – P. 529–546.
15. Бурлуцкая М. Ш. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 10–20.
16. Бурлуцкая М. Ш. О смешанной задаче для уравнений с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 3–12.
17. Крицков Л. В. Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией / Л. В. Крицков, А. М. Сарсенби // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 990–996.
18. Баскаков А. Г. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Уфимск. матем. журн. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 11–34.
19. Криштал И. А. Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов / И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Сиб. электрон. матем. изв. – 2019. – Т. 16. – С. 1091–1132.
20. Владыкина В. Е. Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией / В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 5. – С. 643–659.
21. Baskakov A. G. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, N. B. Uskova // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 477. – P. 930–960.
22. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & физика. – 2020. – Т. 52, № 2. – С. 72–86.

23. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, Н. Б. Ускова // Прикладная математика & физика. – 2020. – Т. 52, № 3. – С. 185–194.
24. Гаркавенко Г. В. Об одном модельном примере метода подобных операторов / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // В сб. Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. – 2020. – С. 112–115.
25. Гохберг И. Ц. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1965. – 448 с.
26. Баскаков А. Г. Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 277–281.
27. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 9. – С. 1261–1265.
28. Ускова Н. Б. Спектральные свойства оператора Дирака с негладким потенциалом общего вида и группы операторов / Н. Б. Ускова // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 8. – С. 1154–1158.
29. Hille E. Functional analysis and semi-groups / E. Hille, R. S. Phillips. – New York: Amer. Math. Soc., 1957. – 808 p.
30. Engel K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equation / K.-J. Engel, R. Nagel. – New York: Springer, 2000. – 609 p.
31. Riesz M. L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy / M. Riesz // Acta Math. – 1949. – Vol. 81. – P. 1–222.
32. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

О ВОЗМОЖНОМ СУЩЕСТВОВАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА В ЗАДАЧЕ О БРАХИСТРОХРОНЕ

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Аннотация. Показано, что при использовании основных принципов теории криволинейного движения в подвижном базисе можно аналитически найти решение задачи о брахистохроне с учетом любых действующих на тело сил. При учете сил сухого и вязкого трения, а также силы тяжести предсказана точка «геометрического фазового перехода», которая соответствует переходу брахистохрон с одного класса траекторий на качественно другой.

Ключевые слова: брахистохрона, сухое трение, вязкое трение, подвижный базис, численное моделирование.

Впервые задача о брахистохроне была предложена для обсуждения Я. Бернулли в 1696 году. При этом ее постановка формулируется буквально в одном предложении. Необходимо найти такой класс кривых, соединяющих две заданные точки A и B , по которым материальное тело могло бы скатиться за наименьшее время.

Как было показано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбница и другими великими математиками, такими линиями оказались циклоиды. При этом основой решения задачи о брахистохроне всегда служили вариационные принципы (см., к примеру, монографии [1–3]). В настоящем сообщении мы приведем подробное решение этой задачи с учетом силы тяжести, а также сил вязкого и сухого трения, исходя из общих принципов динамики криволинейного движения, не прибегая к методам теории оптимального управления и вариационного исчисления.

Решение задачи удобно разбить на две части. Вначале мы приведем ее решение без учета сил трения, а затем учтем диссипативные механизмы.

1. Силы трения отсутствуют.

Составим систему динамических уравнений движения в подвижном базисе $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной к произвольной точке M траектории движения тела, а $\mathbf{n}$ – орт нормали в этой точке. Проекция ускорения силы тяжести на подвижные оси $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$, согласно рис. 1 при этом будут:

$$\begin{cases} g \sin \alpha = \dot{v}, \\ g \cos \alpha = -\frac{v^2}{R}, \end{cases} \quad (1)$$

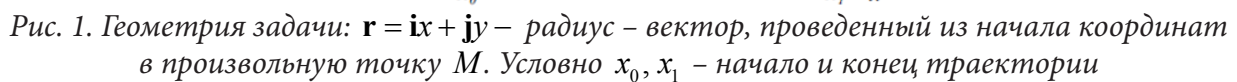
где $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, $R = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} / y''$ – радиус кривизны траектории в точке M .

После преобразований решение системы (1) находится в виде зависимостей

$$v = C_1 |\cos \alpha|, \quad \alpha = -\frac{gt}{C_1}, \quad (2)$$

а после учета соотношений $\dot{x} = v_x = v \cos \alpha$ и $\dot{y} = v_y = v \sin \alpha$, находим и параметрическое уравнение движения тела:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{C_1^2}{4g} \left(\frac{2gt}{C_1} + \sin \left(\frac{2gt}{C_1} \right) \right), \\ y(t) = \frac{C_1^2}{4g} \left(1 - \cos \left(\frac{2gt}{C_1} \right) \right). \end{cases} \quad (3)$$



Введем следующие обозначения. Пусть сила вязкого трения $\mathbf{F}_{1fr} = -k_1 \mathbf{v}$, а сухого $\mathbf{F}_{2fr} = \hat{k}_2 m \mathbf{g}$, где $\hat{k}_2$ – безразмерный тензорный коэффициент трения [4].

$$\begin{cases} \dot{v} = g \sin \alpha - \frac{k_1}{m} v - k_2 g \cos \alpha \left(1 + \frac{|R|}{R} \right), \\ v^2 = |R| g \cos \alpha. \end{cases} \quad (4)$$
$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{2k_2} \ln \left| \frac{C_2}{1 - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} e^{\frac{k_1 t}{m}}} \right|, \\ v = gC_1 \left| e^{\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} \right| \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

83

Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\dot{x} = v_x = v \cos \alpha, \quad \dot{y} = v_y = v \sin \alpha,$$

приходим к решению задачи в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= gC_1 \left| e^{\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} \right| \cos^2 \left[\frac{1}{2k_2} \ln \left| \frac{C_2}{1 - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} e^{\frac{k_1 t}{m}}} \right| \right], \\ \dot{y} = v_y &= -\frac{1}{2} gC_1 \left| e^{\frac{k_1 t}{m}} - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} \right| \sin \left[\frac{1}{k_2} \ln \left| \frac{C_2}{1 - \frac{2mk_2}{C_1 k_1} e^{\frac{k_1 t}{m}}} \right| \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая $C_2 = 1$, из (6) немедленно следует тогда, что

$$\begin{aligned} x(t) &= a \int_0^p |e^{-u} - b| \cos^2 \left[\frac{1}{2k_2} \ln |1 - 2bk_2 e^u| \right] du \\ y(t) &= -\frac{a}{2} \int_0^p |e^{-u} - b| \sin \left[\frac{1}{k_2} \ln |1 - 2bk_2 e^u| \right] du \end{aligned} \quad (7)$$

где безразмерные параметры $p = \frac{k_1 t}{m}$, $a = \frac{mgC_1}{k_1}$ и $b = \frac{m}{C_1 k_1}$.

Как видно из рис. 3, в точке $u_0 = \ln \left(\frac{1}{2k_2 b} \right)$ имеет место своеобразный геометрический «фазовый переход», под которым мы подразумеваем переход с одного класса траекторий на качественно другой.

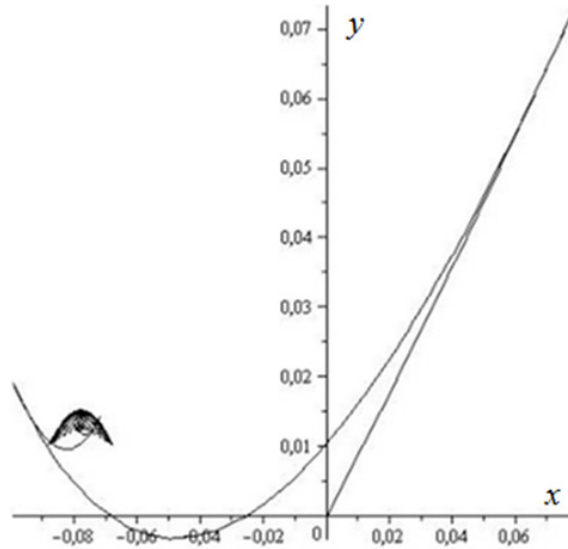


Рис. 3. Для параметров $b=1$, $2k_2=0.1$ показано качественное изменение траектории при переходе через точку «геометрического фазового» перехода $u_0 = \ln 10 \approx 2.3$

Другие результаты численного моделирования решений (7) можно посмотреть в работе авторов [5].

Литература

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 1969. – 424 с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – Москва : Мир, 1974. – 488 с.
3. Гладков С. О. Сборник задач по теоретической и математической физике / С. О. Гладков. – Москва : Физматлит, 2010. – 488 с.
4. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва : Наука, 1988. – 733 с.
5. Гладков С. О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки Физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161101.

О КЛАССЕ ВОЗМОЖНЫХ ФОРМ ЖЕЛОБА, КОГДА СИЛА РЕАКЦИИ С ЕГО СТОРОНЫ НА ДВИЖУЩЕЕСЯ ТЕЛО ПОСТОЯННА

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Воронежский государственный университет

Аннотация. Найдена зависимость силы реакции желоба $N(y)$ на движущееся по нему материальное тело в виде функции от формы этого желоба $y = y(x)$. Класс кривых, для которых $N(y) = \text{const}$, находится из решения уравнения $N(y, y', y'') = \text{const}$. Графически проиллюстрированы возможные зависимости $y(x)$, когда $N = \text{const}$.

Ключевые слова: криволинейное движение, сила реакции, подвижный базис, нелинейное дифференциальное уравнение, численное решение.

Разработанный в работах авторов [1–3] метод решения задач, связанных с криволинейным движением, основан на записи динамических уравнений в подвижном базисе $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной к произвольной точке M траектории движения тела, а $\mathbf{n}$ – орт нормали в этой точке.

С помощью такого подхода легко получить общие уравнения плоского (и не только плоского) криволинейного движения с учетом любых диссипативных сил. Тривиально показать, что при движении тела по параболе сила реакции опоры $N = 0$, а при движении по брахистохроне – $N(y) = 2mg \cos \alpha$, где m – масса тела, $g = |\mathbf{g}|$ – величина ускорения свободного падения, а α – угол между касательной к траектории и осью x .

Если угол α отсчитывать от внешней стороны, то есть угол α тупой, то косинус следует брать со знаком «минусом», как в работе [5].

В настоящей работе будет решаться обратная задача [4], а именно, мы хотим найти такую форму желоба $y(x)$, когда сила реакции при движении по нему материального тела массой m на некотором отрезке $x_0 \leq x \leq x_1$ остается постоянной (см. рис. 1).

Считая α острым углом, запишем общее выражение для силы реакции:

$$N(y) = \frac{mv^2}{R} + mg \cos \alpha, \quad (1)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

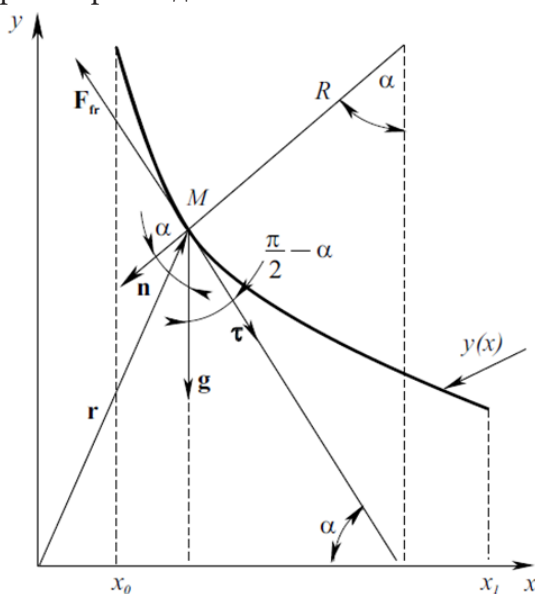


Рис. 1. Геометрия задачи

С учетом соотношений $y' = tg\alpha$, $\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ выражение для силы реакции примет тогда

вид:

$$N(y) = \frac{mv^2 y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{mg}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (2)$$

Фигурирующую в (2) скорость нам следует найти в виде функции от формы желоба $y(x)$. Действительно, проектируя силы на подвижный орт τ , имеем

$$\dot{v} = g \sin \alpha. \quad (3)$$

Из очевидной цепочки соотношений

$$\dot{\alpha} = -\frac{v}{R}, \quad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad d\alpha = \frac{y'' dx}{1+y'^2},$$

следует, что

$$v^2 = v_0^2 - 2gy, \quad (4)$$

где v_0 – начальная скорость, а движение начинается из начала координат. Подстановка (4) в (2) дает зависимость силы реакции желоба от его формы

$$N(y) = \frac{2mg}{\sqrt{1+y'^2}} \left[\frac{y''(a-y)}{1+y'^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (5)$$

Отсюда видно, что если движение происходит по параболе (форма желоба представляет собой параболу) с уравнением $y = x - \frac{x^2}{2a}$, где длина $a = \frac{v_0^2}{2g}$, из (5) немедленно следует отмеченное выше условие отсутствия реакции $N = 0$.

Класс же функций, для которых реакция постоянна $N = \text{const}$, мы найдем из уравнения:

$$\frac{N(y)}{mg} = \frac{2}{\sqrt{1+y'^2}} \left[\frac{y''(a-y)}{1+y'^2} + \frac{1}{2} \right] = p = \text{const}. \quad (6)$$

Решение этого уравнения имеет место, если выполняются следующие два неравенства

$$0 \leq p \leq 1 \text{ и } y \leq a.$$

В результате несложных преобразований уравнение (6) приводится к следующему трансцендентному уравнению

$$\sqrt{\left(p + \frac{1-p}{\sqrt{a}} \sqrt{a-y}\right)^2 - 1} - p \ln \left(p + \frac{1-p}{\sqrt{a}} \sqrt{a-y} + \sqrt{\left(p + \frac{1-p}{\sqrt{a}} \sqrt{a-y}\right)^2 - 1} \right) = \frac{1-p}{\sqrt{a}} x. \quad (7)$$

Для заданных граничных условий, численное решение уравнения (7) позволяет нам построить различные типы траекторий, проиллюстрированных на рис. 2.

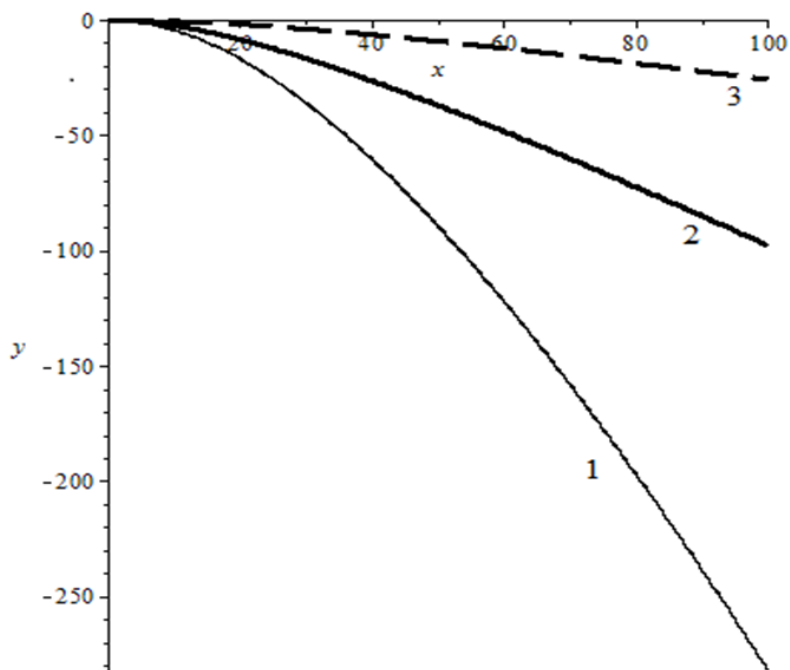


Рис. 2. Траектории, для которых выбран постоянный геометрический фактор $b = 10$. Видно, что с ростом значения p зависимость $y(x)$ стремится к линейной. Кривая 1 соответствует $p = 0.1$, кривая 2 – $p = 0.5$ и кривая 3 – $p = 0.9$. Параметр $a = 1$

Литература

1. Гладков С. О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физ. ф-та МГУ. – 2016. – № 1. – 161101.
2. Гладков С. О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физ. ф-та МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.
3. Гладков С. О. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения, и их численный анализ в некоторых частных случаях / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физ. ф-та МГУ. – 2017. – № 1. – 171101-1-5.
4. Гладков С. О. О классе плоских геометрических кривых с постоянной реакцией на движение по ним материальных тел / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 160. – С. 28–31.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1965. – 436 с.

К ВОПРОСУ О ФОРМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА В УСЛОВИЯХ ЕЕ ВРАЩЕНИЯ

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Аннотация. Получена нелинейная система динамических уравнений движения шарика, скатывающегося по вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω одномерному желобу произвольной формы. Из условия минимальности времени скатывания определена форма этой кривой. С учетом сил сухого и вязкого трений приведены результаты аналитического и численного решения полученной системы уравнений.

Ключевые слова: брахистохрона, частота вращения, силы трения, нелинейные уравнения динамики, сила реакции.

В настоящем сообщении приводится решение задачи о выяснении формы траектории движения материального тела, которое движется по вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω желобу при условии, чтобы время скатывания было минимальным.

Уравнения движения тела будем записывать в мгновенном подвижном ортогональном базисе с ортами $\tau_2, \tau_1, \mathbf{n}$, приведенном на рис. 1. Связь базиса $\tau_2, \tau_1, \mathbf{n}$ с декартовым неподвижным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ можно записать в виде (см. [1–3]):

$$\begin{cases} \tau_2 = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \\ \tau_1 = \mathbf{i} \cos \alpha \sin \varphi - \mathbf{j} \cos \alpha \cos \varphi + \mathbf{k} \sin \alpha, \\ \mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \alpha \sin \varphi - \mathbf{j} \sin \alpha \cos \varphi - \mathbf{k} \cos \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку $d\mathbf{l} = d\rho \cdot \mathbf{n}_1 + \rho d\varphi \cdot \tau_2 + dz \cdot \mathbf{k}$, то с учетом того, что $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$, а матрица обратного преобразования к (1) есть

$$\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \cos \alpha \sin \varphi & -\cos \alpha \cos \varphi & \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \varphi & -\sin \alpha \cos \varphi & -\cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \cos \alpha \sin \varphi & \sin \alpha \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \alpha \cos \varphi & -\sin \alpha \cos \varphi \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix},$$

то в подвижном базисе $\tau_2, \tau_1, \mathbf{n}$ имеем

$$d\mathbf{l} = \mathbf{n} \sin \alpha (-d\rho - \operatorname{ctg} \alpha dz) - \tau_1 \cos \alpha (d\rho - \operatorname{tg} \alpha dz) + \tau_2 \rho d\varphi. \quad (2)$$

Дифференцируя по времени формулу (2) и учитывая, что $\dot{\tau}_2 = \omega \mathbf{n}_1$, $\dot{\mathbf{n}}_1 = -\omega \tau_2$, $\dot{\mathbf{n}} = \omega [\mathbf{n}_1 \times \tau_1]$, а $\dot{\tau}_1 = \frac{v_1}{R} \mathbf{n}$, где R – радиус кривизны, получим выражение для вектора полного ускорения и, соответственно, для вектора полной силы

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \bigg\{ & \omega [\mathbf{n}_1 \times \tau_1] \sin \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \mathbf{n} \dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \\ & + \mathbf{n} \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) - \frac{v}{R} \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) \mathbf{n} + \\ & + \tau_1 \dot{\alpha} \sin \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - \tau_1 \cos \alpha \left(\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} \right) + \rho \omega^2 \mathbf{n}_1 + \tau_2 \dot{\rho} \omega \bigg\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Проектируя вектор силы на нормаль к желобу $\mathbf{n}$, а также на орты τ_1 и τ_2 , и учитывая результаты работы [1], после некоторых преобразований получим полную систему динамиче-

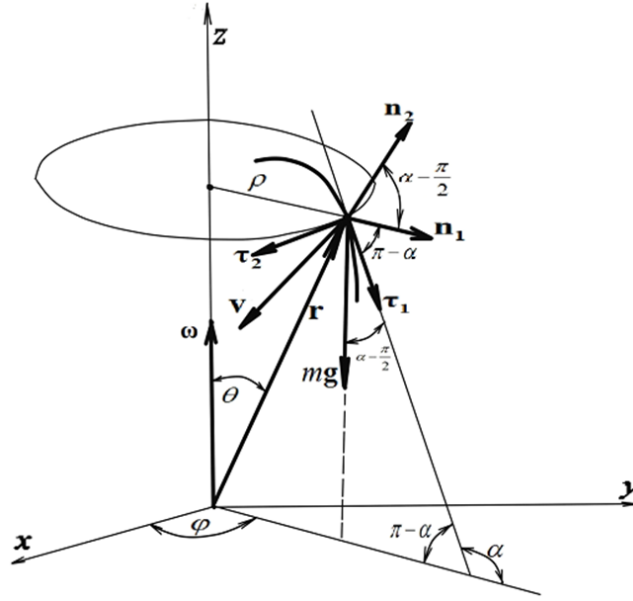


Рис. 1. Угол α это внешний угол между касательной и проекцией желоба на плоскость $x-y$, угол φ – полярный угол между осью x и проекцией желоба на плоскость $x-y$

ских уравнений движения с учетом обоих типов сил сопротивления для случая вращающейся брахистохроны.

$$\begin{cases} N = 2m(\omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha), \\ \dot{v} = g \sin \alpha - \omega^2 \rho \cos \alpha - \frac{F_{fr}}{m}, \\ v \dot{\alpha} = -g \cos \alpha - \omega^2 \rho \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} F_{fr} = k_1 v + k_2 N, \\ \dot{\rho} = -v \cos \alpha, \\ \dot{z} = v \sin \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что сила вязкого трения выбрана в виде, пропорциональном скорости шарика с коэффициентом пропорциональности k_1 , k_2 – коэффициент сухого трения.

Из выражения (4) следует, что если $\omega = 0$, то приведенная система переходит в уравнения работы [1], которые описывают неподвижную брахистохрону.

Вводя в (4) безразмерные аргумент $\tau = \frac{gt}{v_0}$, параметр $\mu = \frac{k_1 v_0}{mg}$ и функции $y_1 = \frac{v_1}{v_0}$, $y_2 = \alpha$, $y_3 = \frac{\rho g}{v_0^2}$, $y_4 = \frac{zg}{v_0^2}$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = \sin y_2 - \lambda y_3 \cos y_2 - \mu y_1 - 2k_2 (\lambda y_3 \sin y_2 - \cos y_2), \\ y_1 y_2' = -\cos y_2 - \lambda y_3 \sin y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_3' = -y_1 \cos y_2, \\ y_4' = y_1 \sin y_2, \end{cases} \quad (5)$$

Результаты численного решения системы (5) показаны на рис. 2–4.

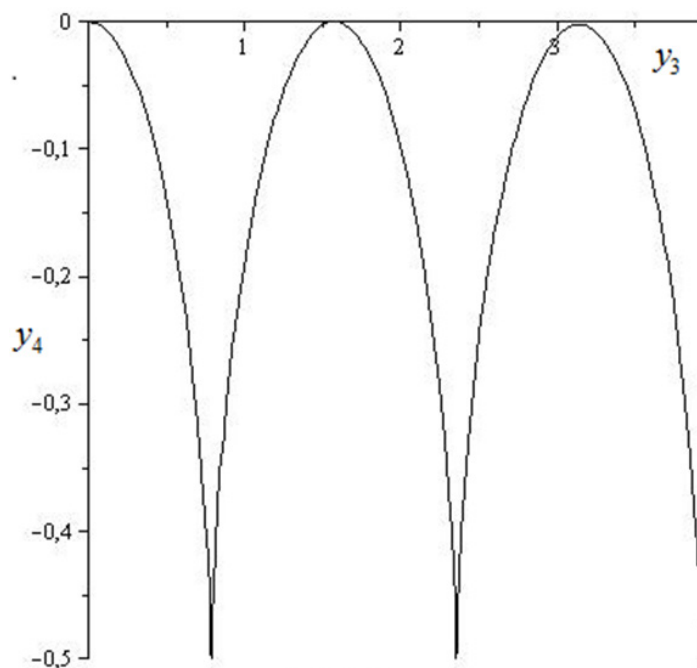


Рис. 2. Численное решение (5) в отсутствии вращения $\lambda = 0$ и в пренебрежении силами сопротивления $k_1 = k_2 = 0$ показано в виде зависимости $y_4(y_3)$. Как и должно быть, получилась классическая брахистохрона

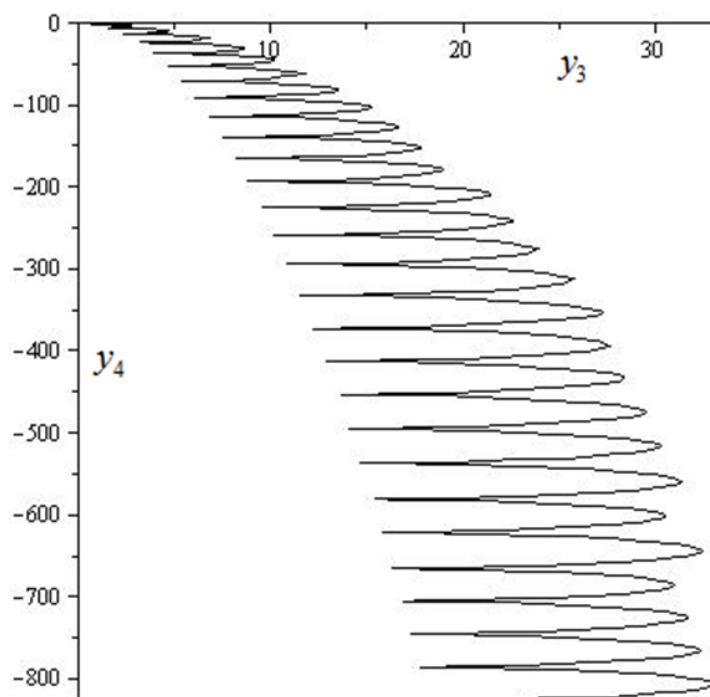


Рис. 3. Решение системы (5) при $k_1 = k_2 = 0$ и с учетом вращения для $\lambda = 5$ показано в виде зависимости $y_4(y_3)$

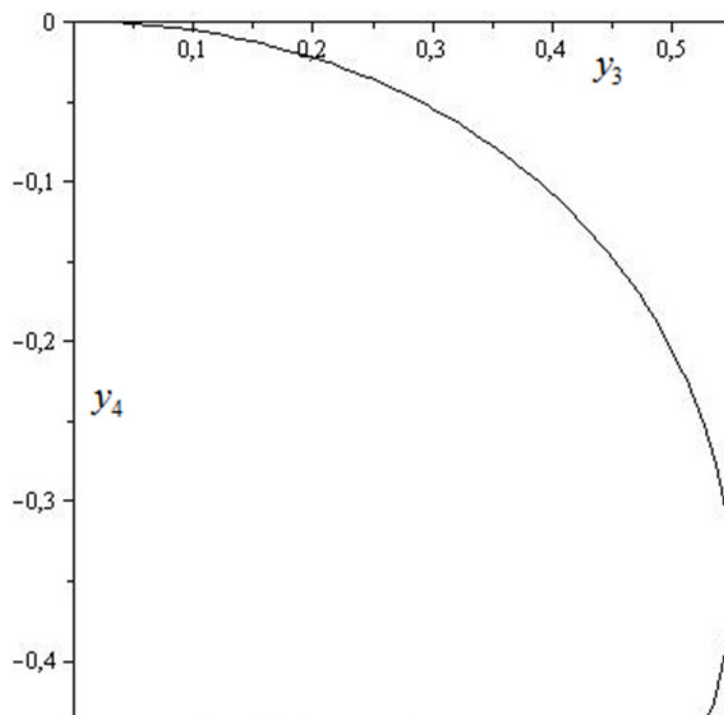


Рис. 4. Иллюстрация формы желоба в условиях вращения $y_4(y_3)$, когда $\lambda = 1$ и при учете сил сопротивления, когда $\mu = 0.01$, а коэффициент сухого трения $k_2 = 0.3$

Литература

1. Гладков С. О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161101-1-5.
2. Гладков С. О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.
3. Гладков, С. О. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 2. – 172101.

ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Аннотация. Дан подробный вывод динамических уравнений в виде замкнутой системы, состоящей из четырех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих плоское криволинейное движение материальных тел. Учтены все силы сопротивления и проанализировано решение системы в некоторых частных случаях. Приведены результаты ее численного решения, которые проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: криволинейное движение, закон сохранения момента импульса, нелинейные динамические уравнения.

В работе [1] была аналитически и численно решена задача о форме кривой наискорейшего спуска материального тела с учетом сил трения. Основной идеей работы была запись динамических уравнений в подвижном базисе $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к траектории, а $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к ней по направлению движения (см. также работы [2–5]). Именно такой подход позволил решить поставленную задачу и получить полную замкнутую систему динамических уравнений материального тела с массой m при учете обоих типов сил трения. Действительно, при знакомстве с обширной литературой по этому вопросу [6–11] мы не обнаружили системы общих динамических уравнений, описывающих плоское криволинейное движение, учитывающих диссипативные свойства реальной физической среды.

На рис. 1 схематически показан произвольный кусок криволинейной траектории, по которой движется тело массой m . Очевидно, что в этом случае уравнения можно записать в виде (см. [1])

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{k_2}{m} v - k_1 \frac{v^2}{R} = g(\sin \alpha - k_1 \cos \alpha), \\ \frac{v^2}{R} - g \cos \alpha = \frac{N}{m}. \end{cases} \quad (1)$$

где k_1 и k_2 коэффициенты сухого и вязкого трения соответственно, R – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке, N – сила реакции желоба.

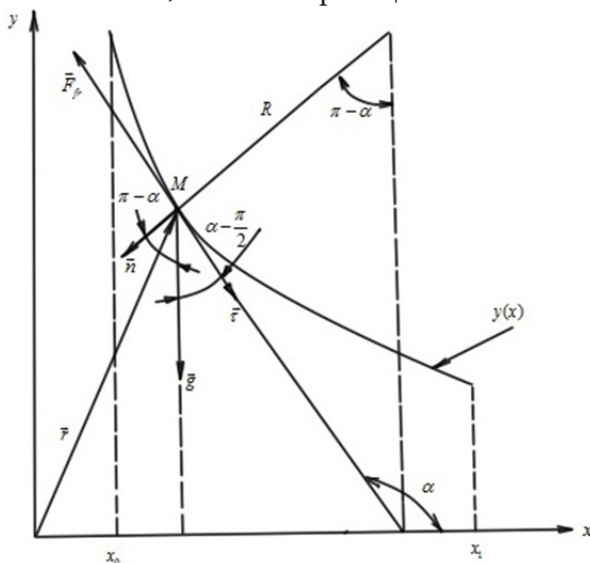


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи

Как было показано в работе [1], в случае, если $N = 0$, траекторией движения будет парабола, а если $N = -2mg \cos \alpha$, то траекторией будет брахистохрона. В общем случае, когда исследуется динамика криволинейного движения по произвольной траектории систему уравнений (1) необходимо дополнить еще уравнением движения вектора момента импульса:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad (2)$$

где момент импульса тела относительно центра неподвижной системы координат $x-y$ есть $\mathbf{L} = m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$, а $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i$, где $\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i]$, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i -й силы $\mathbf{F}_i$. Для z – компоненты уравнения (2) имеем

$$m \frac{d}{dt} [v r \sin(\alpha - \varphi)] = m \dot{v} r \sin(\alpha - \varphi) + m v \frac{d}{dt} [r \sin(\alpha - \varphi)]. \quad (3)$$

С учетом (3) для системы уравнений (1) после некоторых преобразований находим следующую систему динамических уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{k_2}{m} v + k_1 \frac{v^2}{R} = g(\sin \alpha - k_1 \cos \alpha), \\ -gr \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi) + v \frac{d}{dt} [r \sin(\alpha - \varphi)] = \left(\frac{v^2}{R} - g \cos \alpha \right) r \cos(\alpha - \varphi). \end{cases} \quad (4)$$

Нижнее уравнение после раскрытия производной по времени и подстановки в него формулы $\dot{\alpha} = \frac{v}{R}$ существенно упрощается и дает

$$\dot{r} = r \dot{\varphi} \operatorname{ctg}(\alpha - \varphi) \quad (5)$$

После возведения в квадрат выражений для радиуса кривизны $v = R\dot{\alpha} = \frac{dl}{dt} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}$ и

$$R = \frac{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)^{\frac{3}{2}}}{2\dot{r}^2 \dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi} + r^2 \dot{\varphi}^3} \text{ получим} \quad (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \dot{\alpha} = 2\dot{r}^2 \dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi} + r^2 \dot{\varphi}^3, \quad (6)$$

но поскольку $r^2 \dot{\varphi}^2 = v^2 - \dot{r}^2$, то из (6) следует

$$\dot{\alpha} - \dot{\varphi} = \frac{\dot{r}^2 \dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi}}{v^2}. \quad (7)$$

Далее, дифференцируя уравнение (5) по времени, имеем $-\frac{\dot{\alpha} - \dot{\varphi}}{\sin^2(\alpha - \varphi)} = \frac{\ddot{r}r\dot{\varphi} - \dot{r}^2\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\ddot{\varphi}}{r^2\dot{\varphi}^2}$.

Сравнивая это выражение с (7), а также учитывая (5), нижнее уравнение в (4) преобразуется в совсем простое

$$\dot{r} = v \cos(\alpha - \varphi). \quad (8)$$

Из очевидного соотношения (см. [1]) $\frac{m v^2}{R} = -mg \cos \alpha$ следует значительное упрощение верхнего уравнения в системе (4). В результате мы приходим к следующей системе уравнений для всех динамических переменных, в том числе и на углы α и φ :

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{k_2}{m} v = g(\sin \alpha - 2k_1 \cos \alpha), \\ \dot{\alpha} = \pm \frac{g}{v} \cos \alpha, \\ \dot{\varphi} = \frac{v}{r} \sin(\alpha - \varphi), \\ \dot{r} = v \cos(\alpha - \varphi). \end{cases} \quad (9)$$

Полный анализ уравнений (9) подробно приведен в работе [2]. Для анализа (9) удобно ввести во второе уравнение вместо знаков «плюс» – «минус» обобщающий коэффициент p . Такой прием позволяет нам получить целый класс новых траекторий:

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{k_2}{m} v = g(\sin \alpha - 2k_1 \cos \alpha), \\ \dot{\alpha} = p \frac{g}{v} \cos \alpha, \\ \dot{\varphi} = \frac{v}{r} \sin(\alpha - \varphi), \\ \dot{r} = v \cos(\alpha - \varphi). \end{cases} \quad (10)$$

При $k_1 = k_2 = 0$ решения (10) находятся в виде квадратур

$$v(\alpha) = \frac{C_1}{|\cos \alpha|^{\frac{1}{p}}}, \quad \frac{pgt}{v_0} = (-1)^{1/p} \int_0^{\pi-\alpha} \frac{d\tau}{\cos^{\frac{1}{p}+1} \tau}. \quad (11)$$

Как было показано в [2], при $p < 0$ решений не существует. Траектории движения тел при некоторых положительных значениях параметра p приведены на рис. 2.

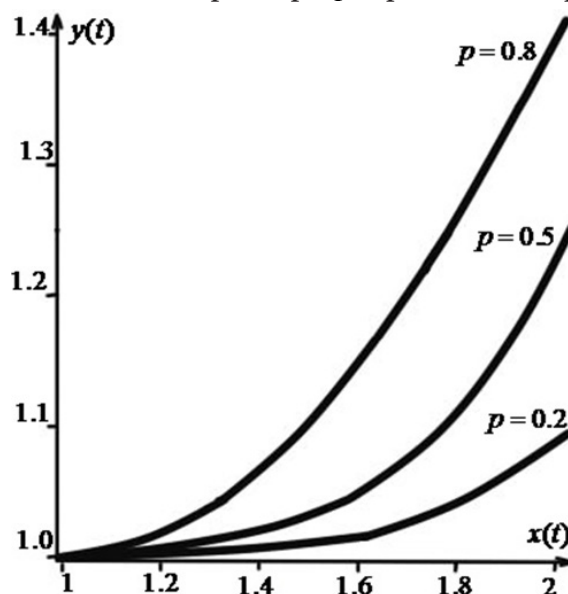


Рис. 2. Криволинейные траектории тела в трех качественно похожих случаях, когда параметр $p = 0.2; 0.5; 0.8$

Литература

1. Гладков С. О. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне с трением / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161001-1-5.
2. Гладков С. О. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 1. – 171101.
3. Гладков С. О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.

4. Гладков С. О. О классе плоских геодезических кривых в поле силы тяжести / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. – 2019. – № 58. – С. 5–13.
5. Гладков С. О. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения / С. О. Гладков, С.Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 2. – 172101.
6. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д.Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва : Наука, 1988. – 216 с.
7. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика / Д. В. Сивухин. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с.
8. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – Москва : Физматлит, 1961. – 824 с.
9. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1966. – 300 с.
10. Добронравов В. В. Основы аналитической механики / В. В. Добронравов. – Москва : Высшая школа, 1976. – 264 с.
11. Коткин Г. Л. Лекции по аналитической механике / Г. Л. Коткин, А. И. Черных, В. Г. Сербо. – Ижевск : РХД, 2010. – 236 с.

О ДВИЖЕНИИ ШАРИКА МЕЖДУ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЖЕСТКИМИ СФЕРАМИ ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ТРЕНИЯ

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Аннотация. Получена нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение точечного шарика массой m , который начинает свое движение в вязкой жидкости между двумя концентрическими сферами из произвольной точки $M_0 = M(\theta_0, \varphi_0)$ при учете всех действующих на него сил. Найдена зависимость силы реакции от угловых переменных θ и φ , и численно проанализировано решение полученной системы уравнений. Проиллюстрирована трехмерная траектория движения шарика между сферами.

Ключевые слова: уравнения криволинейного движения, классическая механика, нелинейная динамика.

В этом сообщении мы приведем подробное решение задачи, суть которой состоит в описании динамики движения шарика в вязкой жидкости между двумя концентрическими жесткими сферами с учетом как вязкого, так и сухого трения, а также силы тяжести. В работе [1] (см. также [2]) рассматривается сферический маятник с учетом сил только вязкого трения, однако, сами уравнения приводятся без строгого вывода. Использование метода, суть которого (см. [3–8]) состоит в проектировании уравнений движения на мгновенный базис $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ (см. рис. 1) позволяет найти решение поставленной задачи.

Введем средний радиус $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$, и разложим вектор скорости по мгновенному базису, взятому на поверхности этой сферы $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ в виде $\mathbf{v} = v_\theta \boldsymbol{\tau}_1 + v_\varphi \boldsymbol{\tau}_2$, где проекции скорости:

$$v_\theta = R\dot{\theta}, \quad v_\varphi = R \sin \theta \dot{\varphi}. \quad (1)$$

Дифференцируя выражение $\mathbf{v} = v_\theta \boldsymbol{\tau}_1 + v_\varphi \boldsymbol{\tau}_2$ по времени, получаем общее выражение для полного ускорения шарика:

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 + R\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \boldsymbol{\tau}_2 + R \sin \theta \ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau}_2 + R\dot{\varphi} \sin \theta \dot{\boldsymbol{\tau}}_2. \quad (2)$$

Учитывая очевидные соотношения $\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 = \frac{d\boldsymbol{\tau}_1}{dl_1} \frac{dl_1}{dt} = v_\theta \frac{\mathbf{n}}{R} = \dot{\theta} \mathbf{n}$, $\dot{\boldsymbol{\tau}}_2 = \frac{d\boldsymbol{\tau}_2}{dl_2} v_\varphi = R \sin \theta \dot{\varphi} \frac{\mathbf{n}'}{R \sin \theta} = \dot{\varphi} \mathbf{n}'$, где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2}{2}$, а единичная нормаль $\mathbf{n}'$ направлена вдоль радиуса окружности $\rho = R \sin \theta$ и лежит в плоскости единичных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\mathbf{n}$, в результате найдем

$$\mathbf{a} = R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}^2 \mathbf{n} + R\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \boldsymbol{\tau}_2 + R \sin \theta \ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau}_2 + R\dot{\varphi}^2 \sin \theta \mathbf{n}'. \quad (3)$$

Подставим это выражение в общее уравнение движения $\mathbf{a} = \mathbf{g} + N \frac{\mathbf{n}}{m} + \frac{\mathbf{F}_c}{m}$, где N – результирующая сила реакции между внешней и внутренней сферами, вектор которой определяется как $N\mathbf{n} = \frac{N_1 \mathbf{n}_1 - N_2 \mathbf{n}_2}{2}$, где N_1 – сила реакции нижней сферы, а N_2 – верхней, и вектор $\mathbf{n}_1$ направлен от внутренней сферы наружу, то есть от общего центра сфер, а $\mathbf{n}_2$ наоборот – к общему центру сфер от внутренней поверхности внешней сферы, $\mathbf{F}_c = -(k_1 v + k_2 N) \frac{\mathbf{v}}{v}$ – суммарная сила сопротивления, в которой k_1 и k_2 – коэффициенты вязкого и сухого трений. В итоге будем иметь

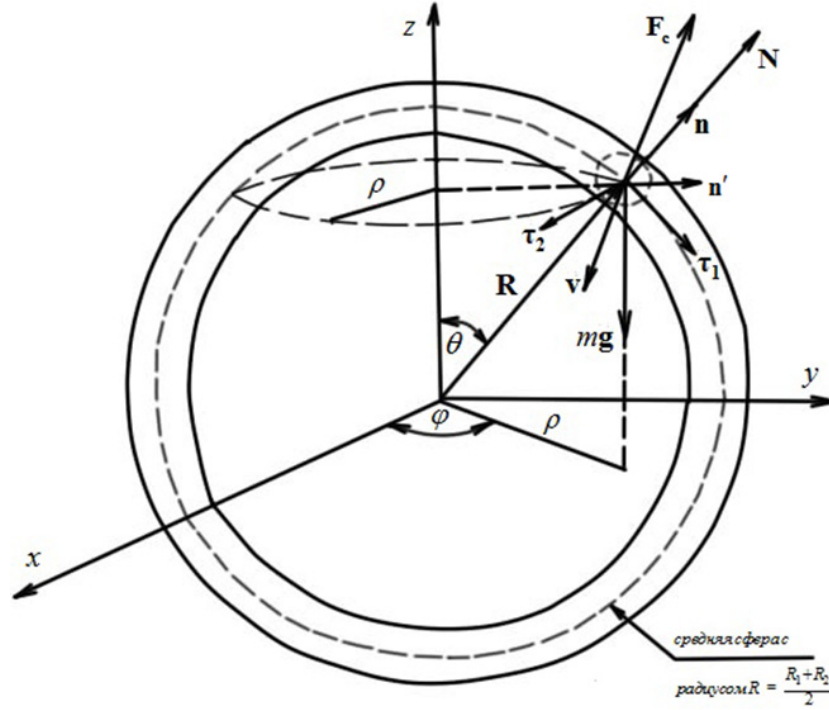


Рис. 1. $\mathbf{R}$ – вектор среднего радиуса, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ – единичная нормаль к нижней сфере, $\boldsymbol{\tau}_1$ – единичный вектор касательной (см. текст статьи), $\boldsymbol{\tau}_2$ – единичный вектор касательной к мгновенной окружности радиуса ρ , проведенной перпендикулярно оси (oz), $\mathbf{n}'$ – единичный вектор нормали к этой окружности (он лежит в плоскости $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}_1$), $\mathbf{v}$ – мгновенная скорость, разложенная по единичному мгновенному базису $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$, $m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{F}_c$ – сила сопротивления, направленная против $\mathbf{v}$ и касательная к поверхности средней сферы, $\mathbf{N}$ – сила реакции, θ – азимутальный угол, φ – полярный угол сферической системы координат, $\alpha = \pi - \theta$

$$\begin{aligned}
 R\ddot{\theta}\boldsymbol{\tau}_1 + R\dot{\theta}^2 \frac{(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)}{2} + R\dot{\varphi}^2 \sin \theta \mathbf{n}' + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \boldsymbol{\tau}_2 + R \sin \theta \ddot{\varphi} \boldsymbol{\tau}_2 = \\
 = \mathbf{g} - \frac{k_2 R}{m v} N (\dot{\theta} \boldsymbol{\tau}_1 + \sin \theta \dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}_2) - \frac{k_1}{m} R (\dot{\theta} \boldsymbol{\tau}_1 + \sin \theta \dot{\varphi} \boldsymbol{\tau}_2) + \frac{N_1 \mathbf{n}_1 - N_2 \mathbf{n}_2}{2m},
 \end{aligned} \quad (4)$$

где были учтены явные выражения (1) для компонент скорости.

Чтобы получить теперь искомую систему динамических уравнений, спроектируем уравнение (4) на подвижные ортогональные орты $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}$. Для этого умножим его обе части скалярно на единичные вектора $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. В результате получаем соответственно

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + k_2 \frac{N \dot{\theta}}{m v} = \frac{\mathbf{g} \boldsymbol{\tau}_1}{R}, \\ \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta + \gamma \dot{\varphi} \sin \theta + k_2 \frac{N \sin \theta \dot{\varphi}}{m v} = \frac{\mathbf{g} \boldsymbol{\tau}_2}{R}, \\ N = \frac{N_1 + N_2}{2} = mR \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \frac{\mathbf{g} \mathbf{n}_1}{R} \right), \\ N = \frac{N_1 + N_2}{2} = mR \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \frac{\mathbf{g} \mathbf{n}_2}{R} \right). \end{cases} \quad (5)$$

где введено вязкое затухание $\gamma = \frac{k_1}{m}$.

Поскольку $\mathbf{g}\mathbf{n}_1 = -\mathbf{g}\mathbf{n}_2 = g \cos(\pi - \theta) = -g \cos \theta$, $\mathbf{g}\mathbf{t}_1 = g \sin \theta$, а $\mathbf{g}\mathbf{t}_2 = 0$, то система (5) переходит в такую

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \gamma \dot{\alpha} + \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \cos \alpha + k_2 \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2}} (\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \alpha) + \omega^2 \sin \alpha = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{\alpha}\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \alpha + \gamma \dot{\varphi} + k_2 \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2}} (\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \alpha) = 0, \\ N = mR(\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \alpha). \end{cases} \quad (6)$$

где учтено, что $v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$.

Начальные условия для решения (6) можно сформулировать в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}. \end{cases} \quad (7)$$

Можно легко показать, что параметрические зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ записываются в виде:

$$x(t) = R \sin \alpha \cos \varphi, \quad y(t) = R \sin \alpha \sin \varphi, \quad z(t) = -R \cos \alpha, \quad (8)$$

где $\theta = \pi - \alpha$.

Таким образом, с учетом начальных условий мы приходим к следующей замкнутой системе уравнений, определяющую траектории движения шарика:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \gamma \dot{\alpha} + \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \cos \alpha + k_2 \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2}} (\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \alpha) + \omega^2 \sin \alpha = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\dot{\alpha}\dot{\varphi} \operatorname{ctg} \alpha + \gamma \dot{\varphi} + k_2 \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2}} (\dot{\alpha}^2 + \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \alpha) = 0, \\ x(t) = R \sin \alpha \cos \varphi, \\ y(t) = R \sin \alpha \sin \varphi, \\ z(t) = -R \cos \alpha, \\ \alpha(0) = \alpha_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = -\frac{v_0}{R}. \end{cases} \quad (9)$$

Чтобы избавиться от особенности в знаменателе $\operatorname{ctg} \alpha$ во втором уравнении на функцию φ при $\alpha = \pi n$, $n \in Z$, запишем $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \varepsilon^2}$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Временные зависимости $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$ при $k_2 = \gamma = 0.1$ и $\varepsilon = 0.02$ приведены на рис. 2.

Трехмерная же траектория движения шарика как результат численного моделирования системы (9) при его радиусе равным единице показана на рис. 3.

Согласно найденным численным решениям системы (9) мы можем найти также любые траектории движения в проекциях на плоскости $x-y$, $y-z$, $x-z$. Рис. 4, например, иллюстрирует соответствующую зависимость на плоскости $x-y$.

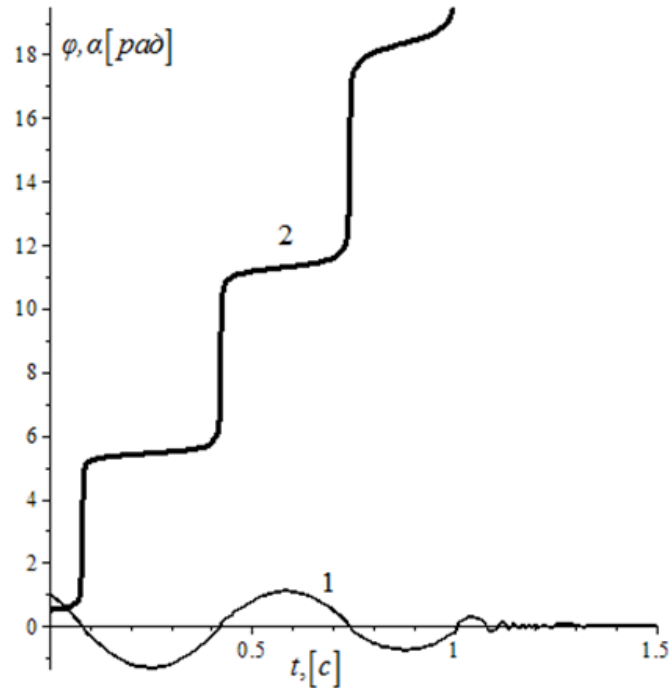


Рис. 2. Линия 1 показывает временную зависимость азимутального угла $\alpha(t)$, а линия 2 – временную зависимость полярного угла $\varphi(t)$. Начальные условия выбраны такими $\alpha(0) = \frac{\pi}{3}$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\alpha}(0) = -10$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ при $k_2 = \gamma = 0.1$ и $\varepsilon = 0.02$

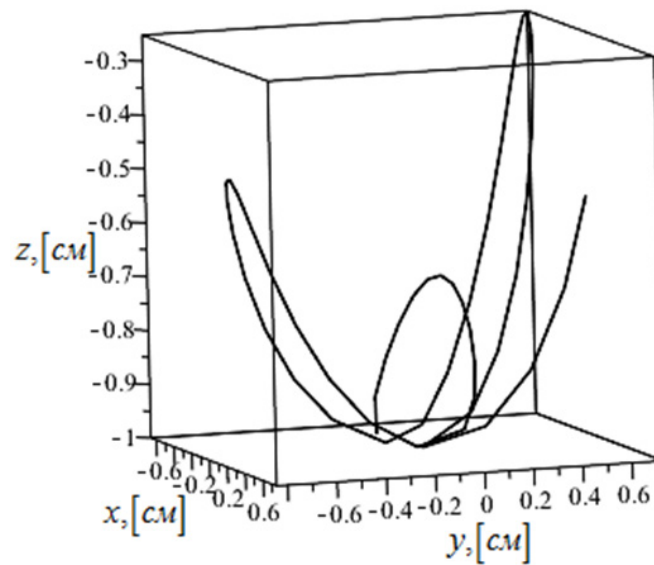


Рис. 3. Для начальных условий $\alpha(0) = \frac{\pi}{3}$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\alpha}(0) = -10$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ и $k_2 = \gamma = 0.1$ приведена траектория движения шарика по сфере в трехмерном измерении

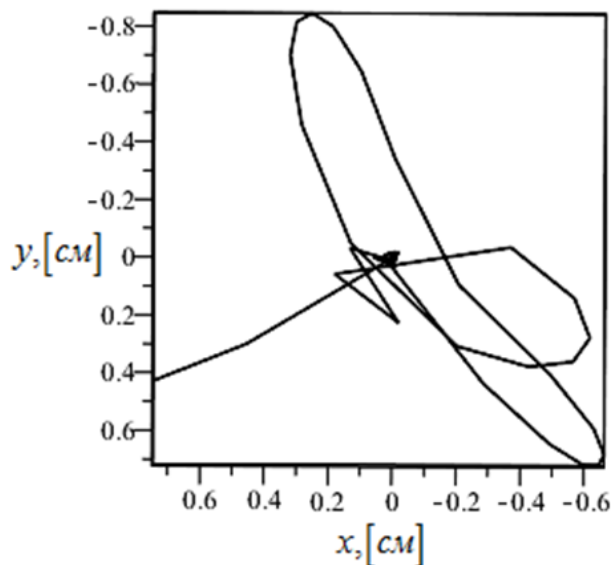


Рис. 4. Проекция трехмерной траектории шарика, изображенной на рис. 3, на плоскость $x-y$

Литература

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т.1 / П. Аппель. – Москва : Физматлит, 1960. – 515 с.
2. *Шаин Ю. Ф.* Исследование системы уравнений, описывающих движение сферического маятника в случае наличия сопротивления / Ю. Ф. Шаин // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 9. – С. 1477–1483.
3. *Гладков С. О.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне с трением / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 1. – 161001-1-5.
4. *Гладков С. О.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 1. – 171101.
5. *Гладков С. О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом / С. О. Гладков // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2016. – № 4. – 164002-1-5.
6. *Гладков С. О.* О классе плоских геодезических кривых в поле силы тяжести / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Вестник Томского Государственного Университета. Математики и механика. – 2019. – № 58. – С. 5–13.
7. *Гладков С. О.* К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения / С. О. Гладков, С. Б. Богданова // Ученые записки физического факультета МГУ. – 2017. – № 2. – 172101.
8. *Gladkov S. O.* On the Moving Trajectory of a Ball in a Viscous Liquid between Two Concentric Rigid Spheres / S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova // Mathematical and Computational Applications. – 2018. – 23. – 77.

ОБ ОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ УСЛОВИЙ КОШИ — РИМАНА

Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского

Аннотация. Обобщенные условия Коши — Римана (далее УКР), как система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, определяет эквивалентность двух четырехмерных пространственно заданных двумя наборами переменных x_i и y_i при $i = 0, 3$. Они получены [1] как обобщение ранее известных результатов [2, 3]. В сообщении показано, что в переменных x_1, x_2, x_3, y_0 эта система совпадает с системой Максвелла для электромагнитного поля, при этом предположено, следуя Дираку, возможное существование магнитных зарядов и токов. Это дает возможность дать физическую интерпретацию всем 8 компонентам решения обобщенных УКР. При принятых за основу обобщенных УКР с необходимостью появляются два скалярных поля, о которых некоторые авторы делают предположение об их существовании. Они интерпретированы как некоторые поля пространственно распределенных электрических и магнитных зарядов и токов. Эти заряды и токи определены самой системой и названы «внутренними». Введение присоединенных обобщенных УКР позволяет дать метод определения потенциалов электромагнитного поля при сделанных предположениях и определить калибровочные преобразования более общие, чем общеизвестные. Разумеется, сделав определенные ограничения, все результаты совпадают с принятыми в классической электродинамике. Автор указывает, что не делает никаких физических утверждений и все построения носят чисто математический характер.

Ключевые слова: кватернионы, спиноры, система Коши — Римана, уравнение Лапласа, система Максвелла.

Введение

Теория функций комплексного переменного одна из наиболее важных ветвей математики, которая содержит как очень глубокие теоретические результаты, так и важные успехи по решению проблем физики и техники. Поэтому развитие ее методов в области функций многих переменных представляет большой интерес.

Обобщенные условия Коши — Римана (УКР) для случая восьмимерного пространства двух наборов переменных x_i, y_i при $i = 0$ были даны в работе автора [1] и имеют вид формально очень близкий к системе Коши — Римана, а именно

$$\left. \begin{aligned} D_1 \chi - \psi D_2 &= 0 \\ \chi \bar{D}_2 + \bar{D}_1 \psi &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.1)$$

Знак минус сохранен специально, чтобы подчеркнуть сходство с системой Коши — Римана. Здесь χ, ψ кватернионные функции переменных x_i, y_i вида

$$\chi = \chi_0(x, y) + \sum_{i=1}^3 \chi_i(x, y) e_i, \quad \psi = \psi_0(x, y) + \sum_{i=1}^3 \psi_i(x, y) p_i. \quad (1.2)$$

В этих записях x, y — сокращенные обозначения наборов переменных, а e_i единицы системы кватернионов [4]. Часть ψ_0 в (1.2) обычно называют исходя из правил преобразования координат скалярной, а $\vec{\psi}$ — векторной частью. Операторы D_1, D_2 достаточно хорошо известные в математике [3], запишем как

$$\left. \begin{aligned} D_1 \\ \bar{D}_1 \end{aligned} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_0} e_0 \pm \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} e_i, \quad \left. \begin{aligned} D_2 \\ \bar{D}_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_0} e_0 \pm \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} e_i. \quad (1.3)$$

Чертой обозначена операция кватернионного сопряжения. Операторы $D_1\bar{D}_1$, $D_2\bar{D}_2$ совпадают с операторами Лапласа, поэтому

$$D_1\bar{D}_1 = \bar{D}_1D_1 = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta_x(4), \quad D_2\bar{D}_2 = \bar{D}_2D_1 = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \Delta_y(4). \quad (1.4)$$

Оператор волнового уравнения, который будет нужен ниже, обозначим символом

$$[4] = \Delta_x(3) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Кватернионную функцию, компоненты которой гармонической функции соответствующих переменных будем называть, возможно, не очень удачно, гармоническим кватернионом.

Выделим особо набор переменных x_1, x_2, x_3, y_0 и считаем, что все функции χ, ψ зависят только от этих переменных. Тогда операторы $D_1, \bar{D}_1, D_2, \bar{D}_2$ можно записать

$$\left. \begin{aligned} D_1 \quad Q \\ \bar{D}_1 \quad Q \end{aligned} \right\} = \mp \operatorname{div} v\vec{q} \pm \operatorname{grad} q_0 \pm \operatorname{rot} \vec{q},$$

$$\left. \begin{aligned} Q \quad D_2 \\ Q \quad \bar{D}_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\partial q_0}{\partial y_0} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Основная система (1.1) в этом случае согласно (1.6) имеет явный вид

$$-\operatorname{div}(x)\vec{\chi} + \operatorname{grad}(x)\chi_0 + \operatorname{rot}(x)\vec{\chi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_0} = 0,$$

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial y_0} - \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y_0} + \operatorname{div}(x)\vec{\psi} - \operatorname{grad}(x)\psi_0 - \operatorname{rot}(x)\vec{\psi} = 0.$$

В данном случае после операторов векторного анализа в скобках указано, по каким переменным идет дифференцирование.

После выделения скалярной и векторной части имеем

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} \vec{\chi} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{\psi} + \frac{\partial \chi_0}{\partial y_0} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{\chi} - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial y_0} + \operatorname{grad} \chi_0 &= 0, \\ -\operatorname{rot} \vec{\psi} + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial y_0} - \operatorname{grad} \psi_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Первые два уравнения имеют скалярный характер, а два других векторный. Уже на этом этапе возникает подозрение о сходстве этой системы с уравнениями электродинамики Максвелла. Несколько труднее найти в системе (1.7) уравнение Дирака для частиц с $m = 0$.

Для дальнейших рассмотрений связанных с потенциалами электромагнитного поля, приведем так называемую присоединенную систему.

$$\bar{D}_1\tilde{\chi} + \tilde{\psi}D_2 = 0,$$

$$-\chi\bar{D}_2 + D_1\psi = 0. \quad (1.8)$$

Для решения поставленной задачи остановимся на неоднородных системах вида

$$D_1\chi - \psi D_2 = \mu,$$

$$\chi\bar{D}_2 + \bar{D}_1\psi = \nu, \quad (1.9)$$

и

$$\begin{aligned}\bar{D}_1\alpha - \beta D_2 &= \chi, \\ -\alpha\bar{D}_2 + D_1\beta &= \psi.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Подстановка (1.10) в (1.9) показывает, что

$$\Delta(8)\chi = \mu, \quad \Delta(8)\psi = \nu.\tag{1.11}$$

Выбор основных переменных x_1, x_2, x_3, y_0 не однозначен. С равным успехом можно выбрать набор y_1, y_2, y_3, x_0 .

1. Система обобщенных УКР как система уравнений классической электродинамики

Для дальнейшего примем, что координата y_0 есть, как это принято в физике, так называемое повернутое время [6] (время Вика)

$$y_0 = ict.\tag{2.1}$$

Разумеется, это меняет систему кватернионов и вызывает появление делителей нуля. Однако в оправдание отметим, что операция деления ниже нигде не используется.

Первый этап состоит в отождествлении компонент кватернионов χ, ψ , входящих в обобщенные УКР с соответствующими электродинамическими параметрами. Это напряженности магнитного $\vec{H}$ и электрического $\vec{E}$ полей. Это нетрудно сделать опираясь на наличие, как в уравнении Максвелла, так и в выражениях (1.7) одинаковых конструкций операторов div и rot .

Как подтверждают дальнейшие рассмотрения, следует выбрать

$$\chi = H_0 + \vec{H}, \quad \psi = i(E_0 + \vec{E}).\tag{2.2}$$

Чтобы сразу охватить общий случай наличие распределенного с плотностью ρ и плотностью тока $\vec{j}_3$ электрического заряда и соответствующими величинами магнитного заряда m , $\vec{j}_m$ примем в системе (1.9)

$$\mu = \rho + \vec{j}_3, \quad \nu = m + \vec{j}_m.\tag{2.3}$$

Полученная система представлена ниже

$$\left. \begin{aligned}\text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial H_0}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{H} &= 4\pi m - \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{grad } E_0 + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{grad } H_0 + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_3.\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

Если исключить магнитные заряды и токи, положив $E_0 = H_0 = 0, \vec{j}_m = 0$, то придем к обычной форме уравнений Максвелла. Примем для системы (2.4) название модифицированная.

Вид системы (2.4) подчеркивает, что производную $\frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t}$ можно рассматривать как некоторую распределенную плотность электрического заряда, а производную $\frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t}$ как плотность магнитного заряда. Выражение $\text{grad } H_0, \text{grad } E_0$ тогда вполне естественно считать плотностями токов.

Эти плотности зарядов и токов определены системой и не являются внешними данными, в отличие от $\rho, m, \vec{j}_3, \vec{j}_m$. Реально учитываются и существуют только $\rho, \vec{j}_3$.

2. Плоская электромагнитная волна

Приведем простейшее решение системы (2.4) в виде плоской электромагнитной монохроматической волны для случая, когда H_0, E_0 отличны от нуля $H_0, E_0 \neq 0$. Для этого запишем, как это делается в общем случае [5], волновое решение в комплексной форме

$$H_i = H_{0i} e^{i\varphi}, \quad E_i = E_{0i} e^{i\varphi}. \quad (3.1)$$

где фаза φ равна

$$\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t. \quad (3.2)$$

Здесь принято, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ волновой вектор и ω циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$, а H_{0i}, E_{0i} амплитудные значения магнитного и электрического скалярных полей.

Примем следующие соотношения, которые подставим в (3.1)

$$\vec{\chi} = \vec{H}, \quad \vec{\psi} = i\vec{E}, \quad y_0 = ict, \quad (3.3)$$

$$\chi_0 = H_0, \quad \psi_0 = iE_0. \quad (3.4)$$

В этом случае найдем для скалярных частей [5]

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_0}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о плоской электромагнитной волне при сделанных предположениях о том, что $H_0, E_0 \neq 0$.

Первоначально обратимся к первой паре уравнений (3.5). Подставив (3.1) в (3.5), найдем

$$(\vec{H}, \vec{k}) = -\frac{\omega}{c} E_0, \quad (\vec{E}, \vec{k}) = +\frac{\omega}{c} H_0. \quad (3.6)$$

Если $H_0, E_0 \neq 0$ (отличны от нуля) из (3.6) следует, что векторы $\vec{H}, \vec{E}$ не ортогональны к волновому вектору $\vec{k}$. Это означает наличие некоторой продольной электромагнитной волны.

Напомним, что H_0, E_0 – скалярные компоненты кватернионов χ, ψ .

Напряженности $\vec{H}, \vec{E}$ рассматриваются в данной точке в определенный момент времени. Проведем через пары $\vec{E}, \vec{k}$ и $\vec{H}, \vec{k}$ плоскости (рис.1).

Введем единичные вектора $\vec{s}, \vec{e}, \vec{m}$, где $\vec{s}$ определен как $\vec{s} = \frac{\vec{k}}{k}$ и потому указывает направление распространения волны. Векторы $\vec{e}, \vec{m}$ ортогональны к $\vec{s}$, но не ортогональны в общем случае друг другу (рис. 2).

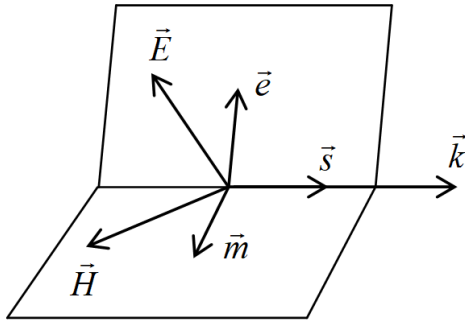


Рис. 1

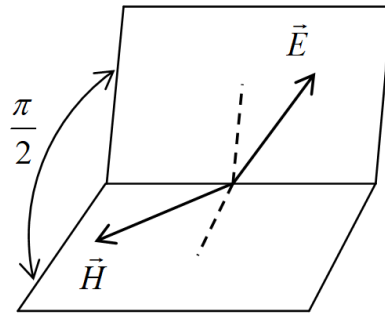


Рис. 2. При $E_s > 0, H_s < 0$

Запишем разложение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по системе $\vec{s}, \vec{e}$ и $\vec{s}, \vec{m}$

$$\vec{E} = E_s \vec{s} + E_e \vec{e}, \quad \vec{H} = H_s \vec{s} + H_m \vec{m}. \quad (3.7)$$

Подставив разложение (3.7) в первую пару уравнений имеем для амплитуд

$$+(\vec{k}, \vec{E}) + \frac{\omega}{c} H_0 = 0, \quad +(\vec{k}, \vec{H}) - \frac{\omega}{c} E_0 = 0. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в общем случае не ортогональны к $\vec{s}$ и подставив (3.7) найдем

$$\left. \begin{aligned} E_s + H_0 &= 0 \\ H_s - E_0 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.9)$$

Эти выражения показывают, что продольные напряженности E_s, H_s совпадают с E_0, H_0 , но E_s, H_0 противоположны по знаку, определенному выбором (3.5). После подстановки (3.1) во вторую пару уравнений (2.4) имеем для амплитуд $\vec{E}, \vec{H}$ систему алгебраических уравнений

$$+\frac{\omega}{c} \vec{E} + [\vec{k} \cdot \vec{H}] + \vec{k} H_0 = 0, \quad (3.10)$$

$$-\frac{\omega}{c} \vec{H} + [\vec{k} \cdot \vec{E}] + \vec{k} E_0 = 0. \quad (3.11)$$

Векторы $[\vec{k} \vec{H}], [\vec{k} \vec{E}]$ нормальны к $\vec{k}$.

Подставим разложение (3.7) в уравнение (3.11) и, учтя свойство векторного произведения, получим

$$\frac{\omega}{c} (E_s \vec{s} + E_e \vec{e}) + k H_m [\vec{s} \cdot \vec{m}] + k \vec{s} H_0 = 0, \quad (3.12)$$

$$-\frac{\omega}{c} (H_s \vec{s} + H_m \vec{m}) + k E_e [\vec{s} \cdot \vec{e}] + k \vec{s} E_0 = 0. \quad (3.13)$$

Учитывая сделанное выше замечание и ортогональность $\vec{s}, \vec{e}$ и $\vec{s}, \vec{m}$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} E_s + k H_0 &= 0, \\ -\frac{\omega}{c} H_s + k E_0 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Вторые соотношения (3.12), (3.13) могут быть выполнены только если $\vec{e}, \vec{m}$ ортогональны.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} E_e + k H_m (-1) &= 0, \\ -\frac{\omega}{c} H_m + k E_e &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (3.14)$$

Из этих соотношений следует, что векторы E_e, E_m поперечные составляющие электрического и магнитного поля ортогональны.

Первые два соотношения (3.14) уже были получены ранее. Вторая пара для E_e, H_m – обычное соотношение для поперечной волны.

Найдем угол α , образованный напряженностями электрического $\vec{E}$ магнитного $\vec{H}$ полей

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{E}, \vec{H})}{|\vec{E}| |\vec{H}|}. \quad (3.15)$$

Если проекции H_s, E_s исчезают, то возвращаемся к полной взаимной ортогональности напряженностей $\vec{E}, \vec{H}$ и вектора $\vec{s}$.

Если H_s, E_s малы по сравнению с H_m, E_m , то

$$\cos \alpha = \frac{H_s E_s}{H_m E_e}. \quad (3.16)$$

3. Введение потенциалов электромагнитного поля

Процесс введения потенциалов с точки зрения кватернионного формализма выглядит сравнительно просто. Кватернионные потенциалы α , β введем с помощью оператора присоединенной системы (1.10), а именно

$$\begin{cases} \chi = \bar{D}_1 \alpha + \beta D_2, \\ \psi = -\alpha \bar{D}_2 + D_1 \beta. \end{cases} \quad (4.1)$$

Подстановка (4.1) в основную систему (1.1) приводит к результату, что кватернионные потенциалы α , β в случае отсутствия внешнего задания зарядов и токов, как электрических, так и магнитных (т. е. система (1.1) однородна) являются гармоническими кватернионами, ибо

$$\Delta(8)\alpha = 0, \quad \Delta(8)\beta = 0. \quad (4.2)$$

Действительно, имеем

$$D_1 \chi - \psi D_2 = D_1 (\bar{D}_1 \alpha + \beta D_2) - (-\alpha \bar{D}_2 + D_1 \psi) D_2 = D_1 \bar{D}_1 \alpha + D_1 \beta D_2 + \alpha \bar{D}_2 D_2 - D_1 \psi D_2 = 0.$$

После приведения подобных имеем

$$D_1 \bar{D}_1 \alpha + D_2 \bar{D}_2 \alpha = 0. \quad (4.3)$$

Аналогично доказывается второе соотношение (4.2).

Напомним, поскольку ранее было принято условие, что все функции χ , ψ , α , β зависят только от x_i , y_0 . Следовательно, на самом деле

$$\Delta(8)\alpha = 0, \quad \Delta(8)\beta = 0.$$

Если $y_0 = ict$, то оператор $\Delta(4)$ будет волновым оператором, который был обозначен

$$[4] = \Delta(3) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

При наличии магнитных зарядов и токов, кроме обычных скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов, имеем скалярный магнитный потенциал b и векторный $\vec{B}$. Для совпадения результатов с общепринятой формой записи необходимо принять

$$\alpha = -b - \vec{A}, \quad \beta = -i\varphi + i\vec{B}. \quad (4.5)$$

Положим, что φ , b скалярные потенциалы электрического и магнитного полей, а $\vec{A}$, $\vec{B}$ соответствующие векторные. Если положить $b = 0$, $\vec{B} = 0$, то вернемся к обычному проверенному предположению, что магнитные заряды и токи реально не существуют.

Связь (4.1) напряженностей и потенциалов в явной векторной форме выражены соотношениями

$$\begin{aligned} H_0 &= -\operatorname{div} \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{grad} b, \\ E_0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{B}, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{B}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Если $b = 0$, $\vec{B} = 0$, то вернемся к обычному случаю [5]. Первое уравнение в (4.6) совпадает с уравнением Лоренца.

Используя (2.4) формулы (4.6) можно проверить непосредственно в векторной форме.

4. Калибровочные преобразования электромагнитных потенциалов

Перейдем к рассмотрению вопроса о калибровочных преобразованиях потенциалов в случае учета скалярных составляющих кватернионов χ, ψ , то есть случаю $E_0, H_0 \neq 0$. Сохраним также возможность существования магнитных зарядов и токов.

Исходя из принятой системы кватернионных потенциалов легко установить, что потенциалы α, β определены с точностью до кватернионных функций η, τ .

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \beta' = \beta + \eta, \quad (5.1)$$

которые удовлетворяют присоединенной системе

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 \tau + \eta D_2 &= 0, \\ -\tau \bar{D}_2 + D_1 \eta &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Таким образом, при замене α, β на α', β' функции χ, ψ не изменяются.

Решение системы (5.2) как известно и это легко проверить, может быть выражено как

$$\tau = D_1 f, \quad \eta = f D_2, \quad (5.3)$$

где f некоторый гармонический кватернион.

Возможны два различных случая. Пусть f скалярный кватернион

$$f = f_0. \quad (5.4)$$

Тогда найдем согласно (1.6)

$$\tau = \text{grad } f_0, \quad \eta = -\frac{1}{ic} \frac{\partial f_0}{\partial t}.$$

Это приводит к известным соотношениям

$$\vec{A}' = \vec{A} - \text{grad } f_0, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (5.5)$$

В этом случае никаких новых скалярных полей не появляется. Это обычная форма калибровочных преобразований, которая используется не только в классической электродинамике, но и в квантовой.

Несколько другая ситуация возникает, если f векторный кватернион

$$\tau = D_1 \vec{f}, \quad \eta = \vec{f} D_2. \quad (5.6)$$

В этом случае по (1.6) найдем

$$\tau = -\text{div } \vec{f} + \text{rot } \vec{f}, \quad \eta = \frac{1}{ic} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}. \quad (5.7)$$

В явной векторной форме это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} - \text{rot } \vec{f}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}, \\ \varphi' &= \varphi, \quad b' = b + \text{div } \vec{f}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, в этом случае затронуты $b, \vec{B}$, так что, если они до преобразования отсутствовали, то после преобразования (5.8) они неизбежно возникнут.

Заключение

В данной работе показано, что обобщенная система уравнений Коши – Римана можно рассматривать как математическую модель уравнений классической электродинамики. При этом следует указать на следующие основные выводы:

1. Существует линейный дифференциальный оператор в частных производных первого порядка с алгебраической структурой, определенной обобщенными УКР, который переводит упорядоченный набор V двух кватернионов χ, ψ в набор R двух кватернионов μ, ν

$$DV = R. \quad (6.1)$$

Предполагается, что все компоненты χ, ψ функций непрерывно дифференцируемы в некоторой области Q .

2. При определенном выборе компонент кватернионов χ, ψ и μ, ν система (6.1) совпадает с системой уравнений Максвелла для напряженностей электромагнитного поля, созданного электрическими зарядами и токами, а так же гипотетическими магнитными зарядами и токами. Рассмотрен случай отличных от нуля скалярных компонент кватернионов χ, ψ , который приводит к выводу о существовании некоторых зарядов и токов, определенных самой системой Максвелла.

3. Указано на существование оператора $\tilde{D}$ (названного присоединенным к D) с указанными в п.1 свойствами, который переводит набор P кватернионов (α, β) в (χ, ψ)

$$\tilde{D}P = V, \quad (6.2)$$

так что

$$D\tilde{D}P = R,$$

где Δ – оператор Лапласа

$$D\tilde{D} = \tilde{D}D = \Delta.$$

При этом предполагается, что все компоненты P дважды непрерывно дифференцируемы по всем независимым переменным в области Q .

4. Показано, что после соответствующего отождествления эта операция (6.2) соответствует обычной процедуре введения электромагнитных потенциалов.

5. Поскольку P при данном V определено неоднозначно, а именно

$$P' = P + G, \quad (6.3)$$

где набор G кватернионов (τ, η) есть решение системы

$$\tilde{D}G = 0.$$

Литература

1. Гладышев Ю. А. Кватернионные методы в электродинамике / Ю. А. Гладышев // Труды математического центра им. Н. К. Лобачевского. – 2019. – Т. 57. – С. 111–115.
2. Moisil M. G. Sur los quaternions monoges // Bull. Sc.Math. 55. – 1931. – P. 168–174.
3. Fueter R. Zur Theorie der regularen Funktionen einer quaternion // Monatsch Math Phys. 43. – 1936. – P. 69–74.
4. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – Москва : Изд-во МГУ, 1980. – 319 с.
5. Ландау Л. Д. Теория поля (серия «Теоретическая физика», том 11) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва: Изд-во «Наука», 1973. – 504 с.
6. Вайнштейн А. И. Инстантонная азбука / А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман. – М. : ИТЭФ, 1981. – 84 с.

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

А. В. Глушко, Е. А. Логинова, А. А. Лесных

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена изучению начально-краевой задачи типа трансмиссии для параболического уравнения, описывающего распространение тепла в полуплоскости с трещиной, представляющей собой отрезок, перпендикулярный границе. На части границы, не содержащей трещину, задано нулевое граничное условие, на остальной части границы – условия на разность температур и тепловых потоков при переходе через берега трещины. Также задано нулевое начальное условие. Задача сводится к обобщенной, для чего строятся нечетные продолжения исходных функций на нижнюю полуплоскость. Выписывается решение задачи, доказываются выполнение граничных и начального условий. Основным результатом работы можно считать асимптотические представления тепловых потоков по расстоянию до берегов трещины.

Ключевые слова: асимптотики, тепловые потоки, ортогональная границе трещина, задача типа трансмиссии, нестационарное уравнение, полуплоскость с разрезом, трещина-разрез, начально-краевая задача, уравнение теплопроводности, нестационарная задача.

Введение

В настоящее время большое количество исследований посвящается классу краевых и начально-краевых задач теплопроводности, упругости, теплоупругости и т. п. для различных областей с трещинами, в частности, большое внимание уделено задачам для эллиптических уравнений [1, 2].

В представленной работе изучается нестационарная задача теплопроводности для параболического уравнения, описывающего распространение тепла в верхней полуплоскости с трещиной, перпендикулярной границе области.

Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \hat{u}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \hat{u}(x, t)}{\partial x_2^2} + \frac{k^2}{4} \hat{u} = 0, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus l$, $t > 0$, $l = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = \pm 0, x_2 \in [0; 1]\}$, $\mathbb{R}_+^2 = \{x | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$.

Равенство (1) дополняется на l граничными условиями

$$\hat{u}(+0, x_2, t) - \hat{u}(-0, x_2, t) = \hat{q}_0(x_2, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \hat{u}(+0, x_2, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{u}(-0, x_2, t)}{\partial x_1} = \hat{q}_1(x_2, t); \quad t \geq 0, x_2 \in (0; 1), \quad (3)$$

на части границы, не содержащей трещину l , граничное условие имеет вид

$$\hat{u}(x_1, x_2, t) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (4)$$

Задано нулевое начальное условие

$$u(x_1, x_2, 0) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (5)$$

Пусть выполнены равенства

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \hat{u}(x_1, x_2, t), & x_2 > 0 \\ -\hat{u}(x_1, -x_2, t), & x_2 < 0 \end{cases}; \quad q_0(x_2, t) = \begin{cases} \hat{q}_0(x_2, t), & x_2 > 0 \\ -\hat{q}_0(-x_2, t), & x_2 < 0 \end{cases};$$

$$q_1(x_2, t) = \begin{cases} \hat{q}_1(x_2, t), & x_2 > 0 \\ -\hat{q}_1(-x_2, t), & x_2 < 0 \end{cases}$$

т. е. функции $\hat{u}$, $\hat{q}_0$ и $\hat{q}_1$ продолжены на нижнюю полуплоскость нечетным образом.
Пусть также $u(x_1, x_2, t) = 0$, $q_0(x_2, t) = 0$, $q_1(x_2, t) = 0$ при $t < 0$.

1. Основные результаты работы

Утверждение 1. Обобщенная задача для задачи (1)–(5) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \Delta u(x_1, x_2, t) + \frac{k^2}{4} u(x_1, x_2, t) = \\ = q_1(x_2, t) \delta_{[-1,1]}(x_1, x_2, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} (q_0(x_2, t) \delta_{[-1,1]}(x_1, x_2, t)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta_{[-1,1]}$ – специальная дельта-функция [3].

Доказательство утверждения 1 основано на применении обобщенной функции $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u + \frac{k^2}{4} u$ из пространства D' к произвольной основной функции $\varphi(x_1, x_2, t) \in D$.

Лемма 1. Пусть функции $\frac{\partial}{\partial x_1} (q_0(x_2, t) \delta_{[-1,1]})$, $q_1(x_2, t) \delta_{[-1,1]}$ принадлежат пространству $D'(\mathbb{R}^3)$, фундаментальное решение оператора $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x + \frac{k^2}{4}$ – функция $E(x_1, x_2, t)$ принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^3)$. Тогда решение задачи (6) можно задать формулой

$$u(x_1, x_2, t) = E(x_1, x_2, t) * (q_1(x_2, t) \delta_{[-1,1]}) + E(x_1, x_2, t) * \left(\frac{\partial q_0(x_2, t) \delta_{[-1,1]}}{\partial x_1} \right). \quad (7)$$

Доказательство леммы 1 основано на применении теоремы о свёртке с финитным функционалом [4].

Основные результаты работы представлены в теореме 1.

Теорема 1. Пусть

- 1) функции $\hat{q}_0$ и $\hat{q}_1$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных;
- 2) функции $\hat{q}_0$ и $\hat{q}_1$ ограничены вместе со своими производными до второго порядка включительно;
- 3) выполнены равенства $\hat{q}_0(x_2, 0) = 0$, $\hat{q}_1(x_2, 0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \hat{q}_1(x_2, 0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \hat{q}_1(x_2, 0) = 0$;
- 4) выполнены условия согласования $q_0(1, t) = q_0(-1, t) = q_1(1, t) = q_1(-1, t) = 0$;
- 5) функции $q_0(x_1, t)$, $q_1(x_1, t)$ принадлежат классу функций M ([4]).

Тогда обобщенное решение задачи (1)–(5) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) = \int_0^t \frac{x_1}{8\pi\tau^2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_0(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau - \\ - \int_0^t \frac{1}{4\pi\tau} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие (2) выполнено по непрерывности, условие (3) выполнено в смысле главного значения, т. е. $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\partial u(\varepsilon, x_2, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(-\varepsilon, x_2, t)}{\partial x_1} = \hat{q}_1(x_2, t)$. Граничное условие (4) выполнено по непрерывности. Также по непрерывности выполнено начальное условие (5).

Функция $\frac{\partial}{\partial x_1} u(x, t)$ непрерывна при $x_2 > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x \notin \{x_1 = 0; x_2 \in (0; 1)\}$, $t > 0$.

При $x_1 \rightarrow +0$, $x_2 \in [-1; 1]$, $t \in [0; T]$, где $T > 0$, справедливы асимптотические представления тепловых потоков

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} = & \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2 + x_1^2} + \frac{1+x_2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} \right) q_0(x_2, t) + \\ & + \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{4} \ln \frac{(1-x_2)^2 + x_1^2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} + \frac{2x_1^2 x_2}{((1-x_2)^2 + x_1^2)((1+x_2)^2 + x_1^2)} \right) \frac{\partial q_0(x_2, t)}{\partial x_2} + r(x, t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_1}{(x_2+1)^2 + x_1^2} - \frac{x_1}{(x_2-1)^2 + x_1^2} \right) q_0(x_2, t) - \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{(x_2+1)^2 + x_1^2}{(x_2-1)^2 + x_1^2} \right) q_1(x_2, t) + \tilde{r}, \quad (10)$$

где $r, \tilde{r}$ – ограниченные на любом компакте функции.

Доказательство. Введение обозначений

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= - \int_0^t \frac{1}{4\pi\tau} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau; \\ u_0(x, t) &= \int_0^t \frac{x_1}{8\pi\tau^2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_0(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau \end{aligned}$$

позволяет представить функцию u в виде суммы $u = u_0 + u_1$.

Пусть $\|q(x_2, t)\| = \sup_{\substack{x_2 \in [0; 1] \\ t \in [0; \infty)}} |q(x_2, t)|$.

Для функции u_1 выполнена оценка $|u_1| \leq ct^{1/3} (|1-x_2|^{1/3} + |1+x_2|)^{1/3} \|q_1\|$, где $c > 0$ константа, из которой по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [4] следует непрерывность интеграла u_1 при $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$.

Аналогично доказывается непрерывность функции u_0 при $x_2 \notin [-1; 1]$, $t > 0$.

При $x_2 \in [-1; 1]$, $t > 0$ интеграл u_0 рассматривается отдельно при $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$. В каждом случае выделяются непрерывные слагаемые и удаётся показать, что $\lim_{x_1 \rightarrow +0} u_0 = \frac{q_0(x_2, t)}{2}$, $\lim_{x_1 \rightarrow -0} u_0 = -\frac{q_0(x_2, t)}{2}$. Таким образом, показано выполнение условий (2) и (4).

Для доказательства выполнения условия (3) функция $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1}$ представляется как сумма трех интегралов $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} = P_1(x, t) + P_2(x, t) + P_3(x, t)$, где

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &= \int_0^t \frac{x_1}{8\pi\tau^2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_1(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau, \quad P_2(x, t) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4\tau}}}{8\pi\tau^2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau} q_0(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau, \\ P_3(x, t) &= - \int_0^t \frac{x_1^2}{16\pi\tau^3} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(\sigma-x_2)^2}{4\tau} - \frac{k^2}{4}\tau - \frac{x_1^2}{4\tau}} q_0(\sigma, t-\tau) d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Доказывается, что $P_1(x, t)$, аналогично интегралу $u_0(x, t)$, непрерывна при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus l$; $t \geq 0$, при $x_2 \in (-1; 1)$, $t > 0$: $\lim_{x_1 \rightarrow +0} P_1 = \frac{q_0(x_2, t)}{2}$, $\lim_{x_1 \rightarrow -0} P_1 = -\frac{q_0(x_2, t)}{2}$.

Для интеграла $P_2(x, t)$ доказывается представление $P_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{q_0(\sigma, t)}{(\sigma-x_2)^2 + x_1^2} d\sigma + J$,

где $J(+0, x_2, t) - J(-0, x_2, t) = 0$, из которого следует равенство $P_2(+0, x_2, t) - P_2(-0, x_2, t) = 0$; $t \geq 0$, $x_2 \in (-1; 1)$.

Заметим, что функцию $q_0(\sigma, t)$ можно записать в виде

$$q_0(\sigma, t) = q_0(x_2, t) + \frac{\partial q_0(x_2, t)}{\partial x_2} (\sigma - x_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_0(x_2, t)}{\partial x_2^2} (\sigma - x_2)^2,$$

откуда следует представление

$$P_2 = -\frac{\arctg \frac{1-x_2}{|x_1|} + \arctg \frac{1+x_2}{|x_1|}}{2\pi|x_1|} q_0(x_2, t) - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(1-x_2)^2 + x_1^2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} \frac{\partial q_0(x_2, t)}{\partial x} + S(x, t),$$

где $S(x, t)$ непрерывна и $|S(x, t)| \leq c \left\| \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2} \right\|$.

Для интеграла $P_3(x, t)$ удаётся доказать равенство

$$P_3 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-x_2}{(1-x_2)^2 + x_1^2} + \frac{1+x_2}{(1+x_2)^2 + x_1^2} + \frac{1}{|x_1|} \left(\arctg \frac{1-x_2}{|x_1|} + \arctg \frac{1+x_2}{|x_1|} \right) \right) q_0(x_2, t) + \\ + \frac{1}{\pi} \frac{2x_1^2 x_2}{((1-x_2)^2 + x_1^2)((1+x_2)^2 + x_1^2)} \frac{\partial q_0(x_2, t)}{\partial x_2} + R_1(x, t),$$

где $R_1(x, t)$ – непрерывная функция и $|R_1(x, t)| \leq c \left\| \frac{\partial^2 q_0}{\partial x_2^2} \right\|$.

Из полученных представлений вытекает выполнение условия (3) в смысле главного значения.

Заметим, что выполнено неравенство $|u_1(x, t)| \leq 2c\sqrt{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Аналогично, можно показать, что $\lim_{t \rightarrow 0} u_0(x, t) = 0$. Итак, доказано начальное условие (5).

Асимптотическое представление для теплового потока $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1}$ следует из вида функций $P_1(x, t)$, $P_2(x, t)$, $P_3(x, t)$.

Аналогично, можно доказать асимптотическое представление функции $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2}$, записав её как сумму нескольких интегралов и оценив каждый из них по отдельности.

Замечание 1. В ходе доказательства теоремы 1 также было показано, что функция $u_1(x, t)$ непрерывна при $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $t > 0$, функция $u_0(x, t)$ непрерывна на множестве $\{x, t | (x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}, t > 0) \setminus (x_2 \in (-1; 1))\}$.

Заключение

Таким образом, выписано интегральное представление обобщенного решения представленной нестационарной задачи теплопроводности, доказано выполнение граничных и начальных условий и, что является наиболее значимым результатом, построены асимптотические представления тепловых потоков по расстоянию до берегов трещины.

Литература

1. *Chen Y. F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate / Y. F. Chen, F. Erdogan // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – V.44. – P. 771.–787.
2. *Glushko A. V.* Modeling of heat transfer in a non-homogeneous material with a crack. The study of singularity at the vicinity of the crack tips / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko // 19th European Conference on Fracture «Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety»: Book of Abstracts, 26-31 August. – Kazan, 2012. – P. 269.
3. *Логина Е. А.* Асимптотическое поведение теплового потока для задачи о стационарном распределении тепла в неоднородной плоскости с трещиной / Е. А. Логина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. – 2012. – № 1. – С. 157–161.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 527 с.

ЛИНЕЙНО-ЗАМЕДЛЕННОЕ ДИССИПАТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛЫ В СЛУЧАЕ СЛАБОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

А. С. Гришков¹, Р. С. Вдовин¹, А. М. Ерёмин¹, П. В. Захаров²

¹Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет
имени В. М. Шукина, г. Бийск

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. Рассмотрена задача об одномерном движении материальной точки под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде с линейным по скорости сопротивлением. Использование теоремы об изменении механической энергии системы позволило свести задачу об определении скорости диссипативного движения как функции координат к задаче об определении работы диссипативной силы. Получены общие дифференциальные уравнения относительно работы, для случая слабого сопротивления получены общие аналитические решения в квадратурах, позволяющие определить характеристики движения при произвольном потенциале.

Ключевые слова: движение, уравнения движения, дифференциальное уравнение, уравнение Абеля, диссипация, диссипативное движение, диссипативная среда, энергия, кинетическая энергия, потенциальная энергия, работа диссипативной силы, потенциальное поле, консервативная система, диссипативная система.

Введение

Одномерное движение системы, состоящей из материальной точки массы m в потенциальном поле, заданном функцией потенциальной энергии U в однородной диссипативной среде, оказывающей линейное по скорости сопротивление, описывается уравнением

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad (1)$$

где α — коэффициент сопротивления среды. Подстановкой $\dot{x} = v(x)$ (1) приводится к уравнению

$$mv(x)\frac{dv(x)}{dx} + \alpha v(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (2)$$

(2) — дифференциальное уравнение Абеля второго рода, неинтегрируемое при произвольном виде функции $U(x)$ [3, с. 37].

В [4] представлен метод, основанный на преобразовании $L \rightarrow L_0 e^{\beta t}$, $p \rightarrow p_0 e^{\beta t}$, где L_0, p_0 — лагранжиан и импульс соответствующей консервативной системы. Далее преобразованием Лежандра находится соответствующий гамильтониан, структура которого при подстановке в уравнение Гамильтона-Якоби позволяет разделить пространственную и временную части движения [4, с. 326]. Для рассматриваемого случая метод даёт уравнение

$$\frac{m}{2}(\mathcal{Q}'_x(x, \alpha))^2 + U(x) = \beta \alpha \mathcal{Q}(x, \alpha) \quad (3)$$

общее решение, которого также неизвестно [4, с. 328].

1. Энергетическая интерпретация задачи

Как мы видим, рассмотренные во введении методы приводят к неинтегрируемым дифференциальным уравнениям (2) и (3). Поэтому сделаем в уравнении (2) подведение под знак дифференциала:

$$mv(x) \frac{dv(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{mv^2(x)}{2} \right) = \frac{dT(x)}{dx},$$

где $T(x)$ — кинетическая энергия диссипативной системы. Выражая скорость $v(x)$ через $T(x)$

$$T(x) = \frac{mv^2(x)}{2} \Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} T(x)}$$

и подставляя в уравнение (2), будем иметь:

$$\frac{dT(x)}{dx} + \gamma \sqrt{T(x)} = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad (4)$$

где

$$\gamma = \alpha \sqrt{\frac{2}{m}}. \quad (5)$$

Далее введём в рассмотрение диссипативную функцию Релея [2, с. 16]

$$F = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

и воспользуемся теоремой об изменении полной механической энергии системы:

$$\frac{dE}{dt} = W,$$

где E — энергия, а W — мощность всех приложенных к системе непотенциальных сил. В нашем случае непотенциальная сила только одна – диссипативная, и её мощность равна [2, с. 17]

$$W = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} = -2F = -\alpha \dot{x}^2 = -\alpha v^2(x),$$

таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \dot{x}^2.$$

Переходя в последней формуле к конечным интервалам, т.е. интегрируя по времени, получим

$$E(t) - E_0 = -\int_{t_0}^t \alpha v^2(x) dt,$$

где E_0 — полная энергия системы в начальный момент времени. Учитывая, что $dt = \frac{dx}{v(x)}$, перейдём к интегрированию по координате и, расписывая выражения для энергии в явном виде, получим кинетическую энергию диссипативной системы уже как функцию координаты:

$$T(x) = E_0 - U(x) - \int_{x_0}^x \alpha v(x) dx. \quad (6)$$

Наконец, вводя обозначение

$$A(x) = \left| \int_{x_0}^x \alpha v(x) dx \right|, \quad (7)$$

перепишем (6) в виде

$$T(x) = E_0 - U(x) - A(x). \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (4) и осуществляя элементарные преобразования, будем иметь:

$$\frac{dA(x)}{dx} - \gamma \sqrt{E_0 - U(x) - A(x)} = 0, \quad (9)$$

а учитывая, что разность $E_0 - U(x)$ есть кинетическая энергия, которой обладала бы система при отсутствии сопротивления и обозначая её

$$K(x) = E_0 - U(x), \quad (10)$$

перепишем (9) в более компактном виде:

$$\frac{dA(x)}{dx} - \gamma \sqrt{K(x) - A(x)} = 0. \quad (11)$$

Функция (7) имеет физический смысл абсолютной величины работы, совершаемой над системой диссипативной силой. Таким образом, задача определения скорости диссипативного движения как функции координаты $v = v(x)$ может быть сведена к задаче отыскания работы диссипативной силы $A(x)$.

Обратим внимание на фигурирующую под радикалом в (11) разность $K(x) - A(x)$, которая согласно (8) представляет собой кинетическую энергию диссипативной системы. Уменьшаемое $K(x)$ здесь может трактоваться как кинетическая энергия т.н. связанной консервативной системы, т.е. системы, имеющей ту же массу и начальные значения скорости и координаты что и диссипативная, но движущейся так, как если бы диссипативная среда отсутствовала. Таким образом, мы снова приходим к идее определения диссипативного движения методом сравнения его со связанным консервативным движением, как и в работах [5, с. 43] и [6, с. 76]. Разница заключается в том, что в [5] и [6] мы рассматривали движение двух систем, синхронное по времени, поэтому их положение отличалось на величину диссипативной поправки, сейчас же рассматриваем движение диссипативной и консервативной систем, имеющих одну и ту же координату. С этой точки зрения работа $A(x)$ может интерпретироваться как диссипативная поправка по энергии относительно консервативного движения, определяемого функцией $K(x)$.

2. Случай слабого сопротивления

Уравнения (9) и (11) также не интегрируются в общем виде, однако по сравнению с исходным уравнением (4) они предоставляют несколько более широкие возможности для анализа. В частности, в случае слабого сопротивления мы можем исходя из физических соображений предполагать, что величина работы диссипативной силы $A(x)$ будет мала по сравнению с величиной $K(x)$. Поэтому, разлагая радикал в (11) в ряд Тейлора по степеням $A(x)$ и пренебрегая всеми членами степени выше первой в связи с их малостью, получим уравнение

$$\frac{dA(x)}{dx} + \frac{\gamma}{2\sqrt{K(x)}} A(x) - \gamma \sqrt{K(x)} = 0, \quad (12)$$

линейное относительно $A(x)$. Интегрируя его в пределах $[x_0, x]$, получим соотношение для $A(x)$:

$$A(x) = \gamma \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right) \left(\int_{x_0}^x \sqrt{K(x)} \exp\left(\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right) dx \right), \quad (13)$$

где функция $K(x)$ определяется выражением (10). В принципе, формула (13) даёт общее решение задачи для рассматриваемого случая слабого сопротивления. Некоторая проблема, однако, состоит в том, что для некоторых потенциалов интеграл

$$\int_{x_0}^x \sqrt{K(x)} \exp\left(\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right) dx$$

в (13) может оказаться неберущимся. Поэтому преобразуем его следующим образом:

$$\int_{x_0}^x \sqrt{K(x)} \exp\left(\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right) dx = \int_{x_0}^x K(x) \exp\left(\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}\right) \frac{dx}{\sqrt{K(x)}},$$

учтём, что выражение $\frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$ является производной интеграла $\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$ под аргументом экс-

поненты и, применяя интегральную теорему о среднем, получим альтернативное соотношение для $A(x)$:

$$A(x) = \frac{2}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x K(x) dx \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}} \right) \right). \quad (14)$$

Таким образом, задача сводится, по существу, к взятию интегралов

$$\int_{x_0}^x K(x) dx \quad (15)$$

и

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}} \quad (16)$$

для конкретных потенциалов $U(x)$.

Акцентируем внимание на выражении $\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}}$, входящем в формулы (13) и (14). Подставим сюда значения γ из (5) и $K(x)$ из (10) и произведём некоторые преобразования:

$$\frac{\gamma}{2} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}} = \frac{\alpha}{m} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}.$$

Как известно [1, с. 39], выражение $\tau(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}$ есть время, затрачиваемое на преодоление расстояния $|x - x_0|$ консервативной системой, движущейся в поле с потенциалом $U(x)$, т. е., в нашей терминологии, связанной консервативной системой. Таким образом, величина работы $A(x)$, определяющая диссипативное движение, оказывается выраженной через функции $K(x)$ и $\tau(x)$, описывающие консервативное движение связанной системы, как и в работах [5, с. 44] и [6, с. 82].

3. Результаты для некоторых потенциалов

Применим полученные в предыдущем подразделе формулы для описания движения в некоторых конкретных полях. Результаты будем выводить графически, используя следующую методику: чёрной пунктирной линией будем выводить график, даваемый формулами (13) или (14) для каждого конкретного потенциала, сплошной серой линией — график численного решения уравнения (11) для каждого конкретного потенциала. Для наглядности будем также выводить график кинетической энергии диссипативной системы $T(x)$, даваемый численным решением уравнения (4) и график функции $K(x)$, определяемой соотношением (10). Все вычисления и построения будем производить с использованием системы компьютерной алгебры (СКА) Maple. Численные решения дифференциальных уравнений будем производить методом Рунге — Кутты 4-5 степени, принятым в СКА Maple по умолчанию

3.1. Однородное поле силы тяжести

Моделировалось падение тела массой $m = 1 \text{ кг}$ с нулевой начальной скоростью в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$ в диссипативной среде с коэффициентом сопротивления $\alpha = 0,01$ ($\gamma \approx 0,014$) с начальной координатой $x_0 = -15000 \text{ м}$ и конечной координатой $x = 0 \text{ м}$. Общее расстояние, пройденное телом, равно 15000 м . Подстановка потенциала $U(x) = mgx$ в формулу (13) даёт в этом случае для $A(x)$ следующее соотношение:

$$A(x) = f(x) - f(x_0) \exp\left(\frac{\gamma}{mg}(\sqrt{E_0 - mgx} - \sqrt{E_0 - mgx_0})\right);$$

$$f(x) = 2(E_0 - mgx) + \frac{4mg}{\gamma} \sqrt{E_0 - mgx} + \frac{4m^2 g^2}{\gamma^2}.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 1.

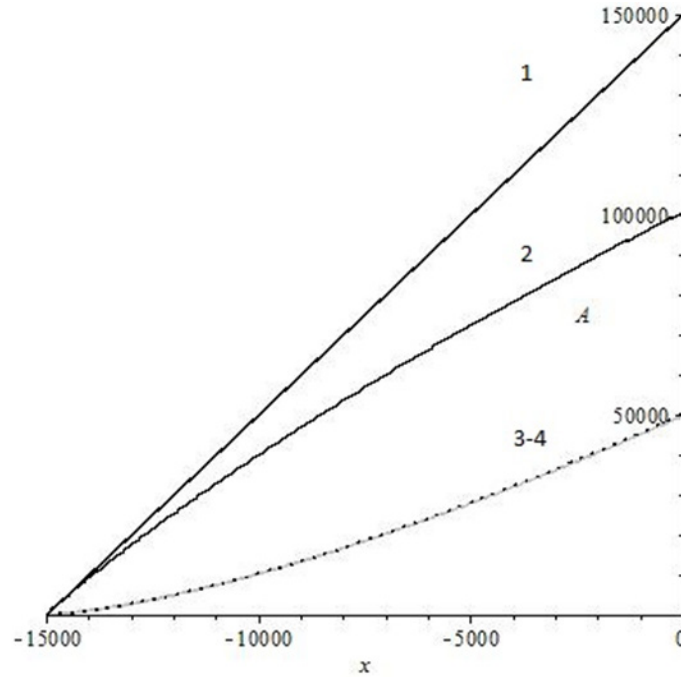


Рис. 1. Кривая 1 — кинетическая энергия связанной консервативной системы, 2 — кинетическая энергия диссипативной системы, 3-4 — наложение графиков численного решения уравнения (11) и аналитического решения уравнения (12)

3.2. Ньютоновское гравитационное поле

Моделировалось движение материальной точки массой $m = 1$ кг с нулевой начальной скоростью в ньютоновском гравитационном поле точечной массы $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг в диссипативной среде с коэффициентом сопротивления $\alpha = 50$ ($\gamma \approx 70,71$) с начальной координатой $x_0 = -5000$ м и конечной координатой $x = -1000$ м. Общее расстояние, пройденное телом, равно 4000 м. В данном случае интеграл в (13) получается неберущимся, поэтому подстановка потенциала $U(x) = -G \frac{mM}{x}$ в формулы (15) и (16) даёт для $A(x)$ следующие соотношения:

$$\int_{x_0}^x K(x) dx = (E_0 x - GmM \ln(x)) \Big|_{x_0}^x;$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{K(x)}} = \left(\frac{\sqrt{x(E_0 x - GmM)}}{E_0} + \frac{GmM}{2E_0^{3/2}} \ln \left(\sqrt{E_0} x + \sqrt{x(E_0 x - GmM)} - \frac{GmM}{2\sqrt{E_0}} \right) \right) \Big|_{x_0}^x.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 2.

Как видно из графиков, при выбранных значениях коэффициента сопротивления аналитические решения уравнения (12), даваемые формулами (13) и (14) в обоих случаях с высокой точностью совпадают с численными решениями уравнения (11).

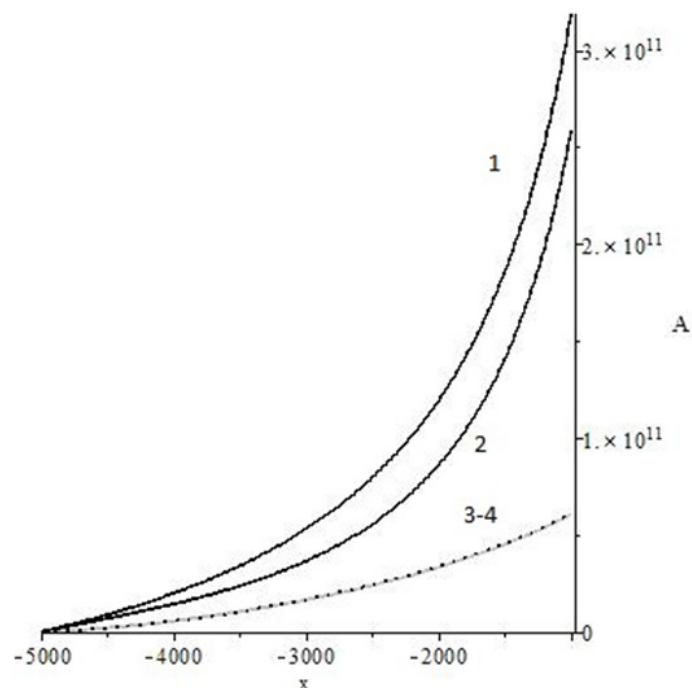


Рис. 2. Кривая 1 — кинетическая энергия связанной консервативной системы, 2 — кинетическая энергия диссипативной системы, 3-4 — наложение графиков численного решения уравнения (11) и аналитического решения уравнения (12)

Заключение

В работе рассмотрено движение диссипативной системы с одной степенью свободы. С помощью теоремы об изменении полной механической энергии задача определения скорости диссипативного движения как функции координаты была сведена к задаче об определении работы диссипативной силы. Получены общие дифференциальные уравнения относительно работы, которые для случая слабого сопротивления удалось свести к линейным дифференциальным уравнениям. Это позволило получить общие аналитические решения в квадратурах, позволяющие определить характеристики диссипативного движения в поле с произвольным потенциалом. Величина работы диссипативной силы оказалась выраженной через функции (кинетическую энергию и время), описывающие движение связанной консервативной системы. Построены графики, иллюстрирующие полученные результаты для движения в конкретных полях: однородном гравитационном поле и гравитационном поле с ньютоновским потенциалом.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: Учеб. пособие в 10-ти т. Т. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е изд., испр. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 216 с.
2. Савельев, И. В. Основы теоретической физики. Т. I. Механика и электродинамика / И. В. Савельев; — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. — 416 с.
3. Зайцев, В. Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — Москва : Физматлит, 1993. — 464 с.
4. Denman, H. H. Solution of the Hamilton-Jacobi equation for certain dissipative classical mechanical systems / H. H. Denman, L. H. Buch // J. Math. Phys. — 1973. — V. 14, № 3. — p. 326–329.

5. Гришков, А. С. Одномерное движение под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде с линейным по скорости сопротивлением / А. С. Гришков, А. М. Ерёмин // МАК: «Математики – Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике с международным участием. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2019. – С. 42–45.

6. Гришков, А. С. Одномерное движение под действием потенциальной силы в однородной диссипативной среде / А. С. Гришков, Р. С. Вдовин, А. М. Ерёмин, П. В. Захаров // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: сборник трудов международной научной конференции. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2020. – С. 75–82.

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ ЛОКАЛЬНО ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. Ю. Гусева, В. Г. Курбатов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Пусть X — банахово пространство, а T — линейный ограниченный оператор, действующий в $l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Оператор T назван *локально ядерным*, если он может быть представлен в виде

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где операторы $b_{km} : X \rightarrow X$ являются ядерными и

$$\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_1} \leq \beta_m, \quad k, m \in \mathbb{Z}^c,$$

здесь $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_1}$ — ядерная норма, $\beta \in l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ или $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$, а g — специальный вес на $\mathbb{Z}^c$. Приводится аккуратная формулировка утверждения о том, что если T является локально ядерным и оператор $\mathbf{1} + T$ обратим, то обратный оператор $(\mathbf{1} + T)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где T_1 также является локально ядерным. Этот результат применяется к операторам, действующим в $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$.

Ключевые слова: локально ядерный оператор, наполненная подалгебра, разностный оператор, оператор свертки, норма с весом.

Пусть X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное. Символом $\mathbf{B}(X)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в X . Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют [16; 9, 6.3.1] *ядерным*, если он представим в виде

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, a_i \rangle y_i, \quad (1)$$

где $y_i \in X$, $a_i \in X^*$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \cdot \|y_i\| < \infty.$$

Коротко это принято записывать так:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes y_i.$$

Множество всех ядерных операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathfrak{S}_1(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_1} = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \cdot \|y_i\|, \quad (2)$$

где инфимум берется по всем представлениям оператора A в виде (1). Хорошо известно [9, 6.3.2], что множество $\mathfrak{S}_1(X)$ является идеалом в $\mathbf{B}(X)$. При этом

$$\|JA\|_{\mathfrak{S}_1(X)}, \|AJ\|_{\mathfrak{S}_1(X)} \leq \|J\|_{\mathfrak{S}_1(X)} \|A\|_{\mathbf{B}(X)}, \quad J \in \mathfrak{S}_1(X), A \in \mathbf{B}(X).$$

Идеал $\mathfrak{S}_1(X)$ является полным (банаховым) пространством относительно нормы (2).

Обозначим через $l_p = l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, пространства последовательностей $x_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}^c$, ограниченных по обычным нормам.

Пусть $c \in \mathbb{N}$. *Весом* на группе $\mathbb{Z}^c$ называют функцию $g : \mathbb{Z}^c \rightarrow (0, +\infty)$. Всегда будем предполагать, что вес на $\mathbb{Z}^c$ обладает следующими свойствами:

- (a) $g(0) = 1$,
- (b) $g(m+n) \leq g(m)g(n)$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}^c$,
- (c) $g(-n) = g(n)$,

- (d) $g(n) \geq 1$,
 (e0) $\lim_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \rightarrow \infty}} \frac{\ln g(nt)}{n} = 0$ для всех $t \in \mathbb{Z}^c$,
 (e1) $\lim_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{g(nt)} = 1$ для всех $t \in \mathbb{Z}^c$.

Очевидно, что условие (d) вытекает из условий (a), (b) и (c). Также нетрудно показать, что условия (e0) и (e1) эквивалентны.

Приведем примеры [14, пример 5.21, 15] весов на группе $\mathbb{Z}^c$. Пусть $0 \leq b < 1$, $a \geq 0$ и $s, t \geq 0$, тогда функции

$$\begin{aligned} g(n) &= 1, \\ g(n) &= (1 + |n|)^s, \\ g(n) &= e^{a|n|^b} (1 + |n|)^s, \\ g(n) &= e^{a|n|^b} (1 + |n|)^s \ln^t(e + |n|) \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям (a)–(e) из определения веса. Понятно, что в этом списке каждый предыдущий пример является частным случаем следующего.

Линейное пространство $\mathbf{B}$ называют [5, 10] *алгеброй*, если в нем определено умножение, обладающее свойствами

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C, \\ \alpha(AB) &= (\alpha A)B = A(\alpha B), \\ (A+B)C &= AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC. \end{aligned}$$

Если $\mathbf{B}$ дополнительно является нормированным пространством и

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

то $\mathbf{B}$ называют *нормированной алгеброй*. Если нормированная алгебра является полным (т. е. банаховым) пространством, ее называют [5, 10] *банаховой алгеброй*.

Пусть g — вес на $\mathbb{Z}^c$, а $\mathbf{B}$ — банахова алгебра. Пространством $l_{1,g}$ на $\mathbb{Z}^c$ со значениями в $\mathbf{B}$ с весом g называют множество $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$, состоящее из всевозможных семейств $a = \{a_m \in \mathbf{B} : m \in \mathbb{Z}^c\}$, для которых

$$\|a\| = \|a\|_{l_{1,g}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} g(m) \|a_m\| < \infty.$$

Очевидно, что $l_{1,g}$ — линейное пространство относительно покомпонентных операций сложения и умножения на скаляры. Если $g(n) \equiv 1$, то пространство $l_{1,g} = l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$ совпадает с обычным пространством $l_1 = l_1(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$. Из свойства (d) веса следует, что $l_{1,g} \subseteq l_1$. Относительно операции свертки, взятой в качестве умножения, $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbf{B})$ превращается в банахову алгебру.

Символом $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(X))$ обозначим множество всех операторов $T \in \mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m \in \mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \quad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathfrak{S}_1(X)$ и выполнена оценка

$$\|b_{km}\|_{\mathfrak{S}_1(X)} \leq \beta_m$$

для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$. Операторы класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(X))$ назовем *локально ядерными*. Нетрудно показать, что $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(X))$ образует подалгебру (и даже идеал) в алгебре $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, X))$. Следующая теорема показывает, что эта подалгебра является наполненной в смысле [5].

Теорема 1. Пусть оператор $\mathbf{1} + T : l_p(\mathbb{Z}^c, X) \rightarrow l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, где $T \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1)$, обратим (хотя бы при одном $p \in [1, +\infty]$). Тогда оператор $\mathbf{1} + T$ обратим при всех $p \in [1, +\infty]$ и обратный оператор имеет вид $\mathbf{1} + T_1$, где $T_1 \in \mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1)$.

Обозначим через λ меру Лебега на $\mathbb{R}^c$. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^c$ — измеримое подмножество. Будем обозначать интеграл от суммируемой функции $x: \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{C}$ относительно меры Лебега λ через $\int_{\mathbb{R}^c} x(t) d\lambda(t)$ или, короче, $\int_{\mathbb{R}^c} x(t) dt$.

Обозначим через $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leq p < \infty$, пространство всех измеримых функций $u: \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{C}$, ограниченных по полунорме

$$\|u\| = \|u\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^c} |u(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

а через $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ пространство всех измеримых существенно ограниченных функций $u: \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{C}$ с полунормой

$$\|u\| = \|u\|_{L_\infty} = \text{ess sup} |u(t)|.$$

Иногда удобно допускать, что функции $u \in \mathcal{L}_p$ могут быть не определены на пренебрежимом (т. е. имеющим меру нуль) множестве. Наконец, обозначим через $L_p = L_p(\mathbb{R}^c) = L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, $1 \leq p \leq \infty$, банахово пространство всех классов функций $u \in \mathcal{L}_p$, с отождествлением почти всюду. Подробнее см. [6]. Обычно пространства $\mathcal{L}_p$ и L_p не различают.

Предложение 2 [13; 19, 1.6.3]. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Тогда отображение $\varphi: \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}) \rightarrow l_p(\mathbb{Z}^c, \mathcal{L}_p([0,1]^c, \mathbb{C}))$, определенное правилом $\varphi(x) = \{x_m\}$, где

$$x_m(t) = x(t+m), \quad t \in [0,1]^c,$$

порождает (после отождествления эквивалентных функций) изометрический изоморфизм $\varphi: L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}) \rightarrow l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1]^c, \mathbb{C}))$ (будем обозначать его тем же символом φ).

Так как пространства $L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ и $l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1]^c, \mathbb{C}))$ изометрически изоморфны, алгебры операторов $\mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}))$ и $\mathbf{B}(l_p(\mathbb{Z}^c, L_p([0,1]^c, \mathbb{C})))$ также изоморфны. Обозначим через $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1) = \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1(L_p([0,1]^c, \mathbb{C})))$, $1 \leq p \leq \infty$, пространство всех операторов $A \in \mathbf{B}(L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}))$, соответствующих операторам класса $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(L_p([0,1]^c, \mathbb{C})))$ в соответствии с изоморфизмом φ , определенном в предложении 2. Другими словами, оператор A принадлежит классу $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$ тогда и только тогда, когда оператор $T = \varphi A \varphi^{-1}$ принадлежит классу $\mathbf{s}_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathfrak{S}_1(L_p([0,1]^c, \mathbb{C})))$. Операторы класса $\mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$ также будем называть *локально ядерными*.

Следующая теорема является наиболее важным частным случаем теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и оператор $\mathbf{1} + A: L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$, где $A \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$, обратим. Тогда обратный оператор $(\mathbf{1} + A)^{-1}$ имеет вид $\mathbf{1} + A_1$, где $A_1 \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда для каждого оператора $A \in \mathbf{S}_{1,g}(\mathbb{R}^c, \mathfrak{S}_1)$ существует измеримая функция

$$n: \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{C}$$

такая, что для любого $x \in L_p(\mathbb{R}^c, \mathbb{C})$ в почти всех точках $t \in \mathbb{R}^c$ (следующий интеграл существует и)

$$(Ax)(t) = \int_{\mathbb{R}^c} n(t,s)x(s)ds.$$

Основные результаты опубликованы в [17]; их доказательство существенно использует теорему Бохнера — Филлипса [11]. Близкие вопросы изучались в [1–4, 7, 8, 12, 14, 15, 18–20].

Литература

1. Баскаков, А. Г. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц / А. Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24, № 3. – С. 64–65.
2. Баскаков, А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ / А. Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38, № 1. – С. 14–28.

3. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.
4. Блатов, И. А. Об оценках элементов обратных матриц и модернизации метода матричной прогонки / И. А. Блатов, А. А. Тертерян // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 32, № 11. – С. 1683–1696.
5. Бурбаки, Н. Спектральная теория / Н. Бурбаки. Элементы математики. – М. : Мир, 1972. – 183 с.
6. Бурбаки, Н. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах / Н. Бурбаки. Элементы математики. – М. : Наука, 1977. – 600 с.
7. Курбатов, В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения / В. Г. Курбатов. – Воронеж : Издательство Воронежского университета, 1990. – 168 с.
8. Курбатов, В. Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов / В. Г. Курбатов // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24, № 2. – С. 87–88.
9. Пич, А. Операторные идеалы / А. Пич. – М. : Мир, 1982. – 536 с.
10. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 443 с.
11. Bochner, S. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings / S. Bochner, R. S. Phillips // Ann. of Math. (2). – 1942. – Vol. 43. – P. 409–418.
12. Fendler, G. Convolution-dominated operators on discrete groups / G. Fendler, K. Gröchenig, M. Leinert // Integral Equations Operator Theory. – 2008. – Vol. 61, No. 4. – P. 493–509.
13. Fournier, J. J. F. Amalgams of L^p and l^q / J. J. F. Fournier, J. Stewart // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1985. – Vol. 13, No. 1. – P. 1–21.
14. Gröchenig, K. Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance / K. Gröchenig // Four Short Courses on Harmonic Analysis: Wavelets, Frames, Time-Frequency Methods, and Applications to Signal and Image Analysis. – Boston–Basel–Berlin : Birkhäuser, 2010. – Applied and Numerical Harmonic Analysis. – P. 175–244.
15. Gröchenig, K. Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices / K. Gröchenig, M. Leinert // Trans. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 358, No. 6. – P. 2695–2711.
16. Grothendieck, A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires / A. Grothendieck. Mem. Amer. Math. Soc. no. 16. – Fourth edition. – Providence, RI : American Mathematical Society, 1966. – 383 p.
17. Guseva, E. Yu. Inverse-closedness of the subalgebra of locally nuclear operators / E. Yu. Guseva, V. G. Kurbatov. – 2020, October. – Preprint. – arXiv: 2010.02883. – 33 p.
18. Guseva, E. Yu. Inverse-closedness of subalgebras of integral operators with almost periodic kernels / E. Yu. Guseva, V. G. Kurbatov // Complex Analysis and Operator Theory. – 2020. – Vol. 14, No. 1. – Paper No. 4, – 23 p.
19. Kurbatov, V. G. Functional differential operators and equations / V. G. Kurbatov. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. – Vol. 473 of Mathematics and its Applications. – xx+433 p.
20. Kurbatov, V. G. Inverse-closedness of the set of integral operators with L_1 -continuously varying kernels / V. G. Kurbatov, V. I. Kuznetsova // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 436, No. 1. – P. 322–338.

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

А. Е. Додонов

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Аннотация. В работе получены оценки решений задачи Коши для неустойчивого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и для однородного уравнения Эйлера, основанные на неравенствах с рациональными мажорантами из работ [1, 2].

Ключевые слова: оценки решений дифференциальных уравнений.

Введение

В работе [1] для решения $y(x) = A_1 e^{z_1 x} + A_2 e^{z_2 x} + \dots + A_n e^{z_n x}$ устойчивого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_0 y = 0 \quad (1)$$

было получено неравенство

$$|y(x)| \leq \frac{n \|r\|}{x}, \quad r(t) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{it - z_k} \right), \quad \|r\| = \max_{t \in \mathbb{R}} |r(t)|, \quad (2)$$

справедливое при $x > 0$.

В работе [2] рассматривалось уравнение (1) с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n)}(0) = y_n,$$

и было показано, что в этом случае для нахождения $r(t)$ нет необходимости знать корни характеристического уравнения:

$$r(t) = \operatorname{Im} \left(\frac{\sum_{k=1}^n \left(y_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} p_{n-j} y_{k-1-j} \right) (it)^{n-k}}{(it)^n + p_{n-1} (it)^{n-1} + \dots + p_0} \right),$$

а оценка (2) учитывает «интерференцию» гармонических слагаемых, входящих в решение $y(x)$, а не только их модули.

1. Оценка решения задачи Коши для неустойчивого линейного однородного уравнения

Рассмотрим задачу Коши для неустойчивого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\tilde{y}^{(n)} + \tilde{p}_{n-1} \tilde{y}^{(n-1)} + \dots + \tilde{p}_0 \tilde{y} = 0, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0, \quad \tilde{y}'(0) = \tilde{y}_1, \quad \dots, \quad \tilde{y}^{(n)}(0) = \tilde{y}_n. \quad (3)$$

Легко проверить, что при α , большем модуля любого из корней характеристического уравнения, решение $y(x)$ устойчивого линейного однородного дифференциального уравнения (1) с коэффициентами

$$p_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j \tilde{p}_j, \quad p_k = \sum_{j=k}^{n-1} C_j^k \alpha^{j-k} \tilde{p}_j + C_n^k \alpha^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

и начальными условиями

$$y_0 = \tilde{y}_0, \quad y_k = \sum_{j=0}^k c_k^j (-\alpha)^{k-j} \tilde{y}_j, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

связано с решением задачи (3) равенством $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} y(x)$. Тогда для решения задачи (3) при $x > 0$ справедливо неравенство

$$|\tilde{y}(x)| \leq \frac{ne^{\alpha x} \|r\|}{x}. \quad (6)$$

Подходящее α можно найти, оценив границу корней характеристического уравнения, например, с помощью метода квадрирования.

2. Оценка решения задачи Коши для однородного уравнения Эйлера

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение Эйлера

$$\hat{p}_n(t+\beta)^n \hat{y}^{(n)} + \hat{p}_{n-1}(t+\beta)^{n-1} \hat{y}^{(n-1)} + \dots + \hat{p}_0 \hat{y} = 0, \quad (7)$$

с условиями

$$\hat{y}(1-\beta) = \hat{y}_0, \quad \hat{y}'(1-\beta) = \hat{y}_1, \quad \dots, \quad \hat{y}^{(n)}(1-\beta) = \hat{y}_n. \quad (8)$$

Как известно, заменой переменной $t+\beta = e^x$ однородное уравнение Эйлера сводится к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Пусть

$$\sigma_m(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} z_{j_1} \dots z_{j_m}, \quad \hat{\sigma}_0^{(k-1)} = 1, \quad \hat{\sigma}_m^{(k-1)} = \sigma(1, \dots, k-1, 0, \dots, 0),$$

$$p_0 = \frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_n}, \quad p_m = \frac{1}{\hat{p}_n} \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} \hat{p}_k \hat{\sigma}_{k-m}^{(k-1)}.$$

Справедливо равенство (см., например, [3])

$$(t+\beta)^k \hat{y}^{(k)} = \prod_{j=0}^{k-1} (D-j) y(x), \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Правая часть последнего равенства имеет вид

$$\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \hat{\sigma}_m^{(k-1)} D^{k-m} y(x).$$

Отсюда видим, что уравнение (7) сводится к уравнению (1), где $y(x) = \hat{y}(e^x - \beta)$.

Начальные условия для (1), как несложно видеть, получаются из условий (8) следующим образом:

$$y_k = \left(\hat{y}(e^x - \beta) \right)_{x=0}^{(k)}.$$

Таким образом, если (1) устойчиво, для решения $\hat{y}(t)$ задачи Коши для однородного дифференциального уравнения Эйлера при $t > 1-\beta$ справедливо неравенство

$$|\hat{y}(t)| \leq \frac{n \|r\|}{\ln(t+\beta)}.$$

Аналогичным образом, из (6) можно получить оценку и в неустойчивом случае. Именно, если задача (7), (8) сводится к задаче (3) с неустойчивым уравнением, то, находя коэффициенты и начальные условия по формулам (4), (5), получим неравенство

$$|\hat{y}(t)| \leq \frac{n(t+\beta)^\alpha \|r\|}{\ln(t+\beta)},$$

справедливое при $t > 1-\beta$.

Литература

1. Данченко, В. И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы / В. И. Данченко // Математический сборник – 2006. – Т. 197, Вып. 4 – С. 33–52.
2. *Danchenko, V. I.* Estimates for exponential sums. Applications / V. I. Danchenko, A. E. Dodonov // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 188, no 3. – P. 197–206.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 4-е изд., испр. – Москва : Наука, 1971. – 576 с.

ЗАДАЧА О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

А. А. Домнич

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается математическая модель, описывающая установившееся течение неравномерно нагретой вязкой жидкости через заданную локально-липшицеву область с отверстиями. Вводится понятие слабого решения в декартовом произведении соболевских пространств. Получены достаточные условия для существования слабых решений. Установлено энергетическое равенство, которому удовлетворяют слабые решения.
Ключевые слова: неизомермическое течение, вязкая жидкость, слабые решения, теорема существования, топологическая степень, метод Галеркина, энергетическое равенство.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, — ограниченная область с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим стационарную математическую модель, описывающую неизомермическое течение вязкой несжимаемой жидкости через область Ω при смешанных краевых условиях:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{T} = \mu(\theta) \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I} \text{ в } \Omega, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) = \omega(\mathbf{x}, \theta) \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, (\mathbf{T} \mathbf{n})_\tau = -\varkappa(\theta) \mathbf{u}_\tau \text{ на } \partial\Omega \setminus S, \\ \theta = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus S, \\ \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, |\mathbf{u}|^2/2 + p = h \text{ на } S, \\ k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = -\psi \text{ на } S, \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ — скорость течения в точке $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$; $\theta = \theta(\mathbf{x})$ — температура; $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta)$ — плотность внешних объемных сил; $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ — тензор напряжений Коши; $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформации, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top)/2$; $\mathbf{I}$ — единичный тензор; $p = p(\mathbf{x})$ — давление; $\mu(\theta) > 0$ — коэффициент вязкости; $k(\theta) > 0$ — коэффициент теплопроводности; $\varkappa(\theta) > 0$ — коэффициент проскальзывания; $\omega(\mathbf{x}, \theta)$ — мощность тепловых источников; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$; S — плоский (прямолинейный при $d = 2$) участок границы, где происходит протекание, или объединение нескольких таких участков; $\psi, h: S \rightarrow \mathbb{R}$ — функции, характеризующие тепловой поток и напор на S соответственно. Нижний индекс τ обозначает касательную составляющую вектора, т. е. $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$.

Будем предполагать выполнение следующих шести условий:

- (i) множества S и $\partial\Omega \setminus S$ имеют положительную $(d-1)$ -мерную меру Лебега;
- (ii) справедливы включения: $h \in L^2(S)$ и $\psi \in L^2(S)$;
- (iii) функции $\mu, k, \varkappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и существуют константы $\mu_i, k_i, \varkappa_i$, $i = 0, 1$, такие, что $0 < \mu_0 \leq \mu(y) \leq \mu_1$, $0 < k_0 \leq k(y) \leq k_1$ и $0 < \varkappa_0 \leq \varkappa(y) \leq \varkappa_1$ для любого $y \in \mathbb{R}$;
- (iv) функции $\mathbf{f}(\cdot, y), \omega(\cdot, y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы для любого $y \in \mathbb{R}$;
- (v) функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \cdot), \omega(\mathbf{x}, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны для п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$;
- (vi) существуют функции $f_0, \omega_0 \in L^2(\Omega)$ такие, что $|\mathbf{f}(\mathbf{x}, y)| \leq f_0(\mathbf{x})$ и $|\omega(\mathbf{x}, y)| \leq \omega_0(\mathbf{x})$ для любого $y \in \mathbb{R}$ и п. в. $\mathbf{x} \in \Omega$.

Введем необходимые обозначения и функциональные пространства. Будем использовать стандартные обозначения для пространств Соболева и Лебега. Пусть

$$\mathbb{X}_S(\Omega) = \{\mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega \setminus S} = 0, \mathbf{v}_\tau|_S = \mathbf{0}\},$$

$$\mathbf{X}_S(\Omega) = \text{замыкание множества } \mathbb{X}_S(\Omega) \text{ в пространстве } \mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$\mathbb{Y}_S(\Omega) = \{\eta \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \eta|_{\partial\Omega \setminus S} = 0\},$$

$$\mathbf{Y}_S(\Omega) = \text{замыкание множества } \mathbb{Y}_S(\Omega) \text{ в пространстве } H^1(\Omega).$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Если четверка $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{T}, p)$ — классическое решение задачи (A), то выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} u_i \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_S (|\mathbf{u}|^2/2 + h)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_{\Omega} \mu(\theta) \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \\ + \int_{\partial\Omega \setminus S} \kappa(\theta) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^d \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \eta d\mathbf{x} + \int_{\Omega} k(\theta) \nabla \theta \cdot \nabla \eta d\mathbf{x} + \int_S \psi \eta d\sigma = \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}, \theta) \eta d\mathbf{x} \quad (2)$$

для любых $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_S(\Omega)$ и $\eta \in \mathbf{Y}_S(\Omega)$.

Введем понятие слабого решения краевой задачи (A).

Определение. Слабым решением краевой задачи (A) будем называть пару функций $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X}_S(\Omega) \times \mathbf{Y}_S(\Omega)$ такую, что выполнены тождества (1) и (2) для любых $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_S(\Omega)$ и $\eta \in \mathbf{Y}_S(\Omega)$.

Теорема 2. Пусть выполнены допущения (i)–(vi). Тогда

(a) если выполнено неравенство

$$k_0 > \frac{M_1(\Omega, S) \|h\|_{L^2(S)} + M_2(\Omega, S) \|f_0\|_{L^2(\Omega)}}{2 \min\{\mu_0, \kappa_0\}},$$

в котором константы $M_1(\Omega, S)$ и $M_2(\Omega, S)$ определены по формулам:

$$\begin{aligned} M_1(\Omega, S) &= \|\gamma_S\|_{L(\mathbf{X}_S(\Omega), L^2(S))}^2 \|\gamma_S\|_{L(\mathbf{Y}_S(\Omega), L^4(S))}^2, \\ M_2(\Omega, S) &= \|\gamma_S\|_{L(\mathbf{X}_S(\Omega), L^2(S))}^2 \|\mathcal{I}\|_{L(\mathbf{X}_S(\Omega), L^2(\Omega))}^2 \|\gamma_S\|_{L(\mathbf{Y}_S(\Omega), L^4(S))}^2, \end{aligned}$$

где γ_S — оператор следа, $\mathcal{I}$ — оператор вложения, то задача (A) имеет хотя бы одно слабое решение;

(b) всякое слабое решение задачи (A) удовлетворяет энергетическим равенствам:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu(\theta) |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega \setminus S} \kappa(\theta) |\mathbf{u}|^2 d\sigma + \int_S h(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta) \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} k(\theta) |\nabla \theta|^2 d\mathbf{x} + \int_S [\psi \theta + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \theta^2 / 2] d\sigma = \int_{\Omega} \omega(\mathbf{x}, \theta) \theta d\mathbf{x}; \end{aligned}$$

(c) множество слабых решений задачи (A) секвенциально слабо замкнуто в пространстве $\mathbf{X}_S(\Omega) \times \mathbf{Y}_S(\Omega)$.

Замечание 1. Для построения слабых решений краевой задачи (A) использовался метод Галеркина. Разрешимость соответствующих галеркинских аппроксимаций доказана с привлечением методов теории топологической степени Брауэра на основе вывода энергетических оценок приближенных решений. Предельный переход проводился с помощью известных теорем о компактности вложения соболевских пространств и компактности оператора следа.

Замечание 2. Линеаризованная система уравнений, описывающая протекание неравномерно нагретой несжимаемой вязкой жидкости сквозь ограниченный сосуд с двумя плоскими отверстиями, исследована в [1].

Настоящая работа выполнена совместно с Е. С. Барановским [2].

Литература

1. Крейн С. Г. Задача протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости / С. Г. Крейн, Чан Тху Ха // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – Т. 29, № 8. – С. 1153–1158.
2. Барановский Е. С. О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область / Е. С. Барановский, А. А. Домнич // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 317–327.

ПОСТРОЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Н. В. Зайцева

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Аннотация. Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с n сдвигами по пространственной переменной построено однопараметрическое семейство гладких решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа разностного оператора уравнения положительна.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение.

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено J. Bernoulli [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Рассмотренное им уравнение встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других ученых (см., напр., [2] и имеющуюся там библиографию).

В настоящее время подробно исследованы задачи для дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях (см., напр., [3] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях изучены задачи для параболических [4] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений с частными производными [5–7]. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по переменной времени [8].

Рассмотрим в полуплоскости $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ гиперболическое дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial^2 u(x - h_j, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где a_j и h_j ($j = \overline{1, n}$) — заданные вещественные числа.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора L уравнения (1) равна

$$\operatorname{Re} L(\xi) = -\xi^2 \sum_{j=1}^n a_j \cos(h_j \xi).$$

Будем называть оператор: $-L$ положительным оператором, если выполняется условие

$$-\operatorname{Re} L(\xi) > 0$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^1$, то есть, если справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^n a_j \cos(h_j \xi) > 0. \quad (2)$$

В дальнейшем будем считать оператор $-L$ положительным.

Применив классическую операционную схему Гельфанда — Шилова (см. [9]), введем по аналогии с работами [10, 11] однопараметрическое семейство функций

$$G(x, t, \xi) := \sin(\rho(\xi)\xi t \cos \theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x) e^{\rho(\xi)\xi t \sin \theta(\xi)} + \\ + \sin(\rho(\xi)\xi t \cos \theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x) e^{-\rho(\xi)\xi t \sin \theta(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := \left(\left(\sum_{j=1}^n a_j \cos(h_j \xi) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_j \sin(h_j \xi) \right)^2 \right)^{1/4}$$

и

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sum_{j=1}^n a_j \sin(h_j \xi)}{\sum_{j=1}^n a_j \cos(h_j \xi)}.$$

Отметим, что функции $\rho(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определены корректно при всех значениях параметров a_j , h_j ($j = \overline{1, n}$), и ξ .

Доказана

Теорема. При выполнении условия (2) функция $G(x, t; \xi)$ удовлетворяет уравнению (1) при любом вещественном значении параметра ξ .

Также доказано, что условие (2) не может быть выполнено, если все n сдвигов в правой части уравнения (1) отличны от нуля. Рассмотрен единственно возможный случай, когда один и только один сдвиг равен нулю. Пусть, например, $h_1 = 0$. В этом случае, условие (2) (или условие положительности оператора: $-L$) выполняется, если $a_1 > \sum_{j=2}^n |a_j|$.

Литература

1. Bernoulli, J. Meditationes. De chordis vibrantibus / J. Bernoulli // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. – 1728. – No 3. – P. 13–28.
2. Burkhardt, H. Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik / H. Burkhardt // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. – 1908. – No 10. – P. 1–1804.
3. Skubachevskii, A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications / A. L. Skubachevskii. – Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. – 293 p.
4. Муравник, А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А. Б. Муравник // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2014. – № 52. – С. 3–143.
5. Муравник, А. Б. Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений / А. Б. Муравник // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100, № 4. – С. 566–576.
6. Muravnik, A. On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms / A. Muravnik // Math. Model. Nat. Phenom. – 2017. – Vol. 12, No 6. – P. 130–143.
7. Муравник, А. Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики / А. Б. Муравник // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, № 5. – С. 747–762.
8. Власов, В. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории / В. В. Власов, Д. А. Медведев // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2008. – № 30. – С. 3–173.
9. Гельфанд, И. М. Обобщенные функции. Вып. 3.: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958. – 276 с.
10. Зайцева, Н. В. Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н. В. Зайцева // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 6. – С. 745–751.
11. Зайцева, Н. В. О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений / Н. В. Зайцева // Докл. АН. – 2020. – Т. 491, № 2. – С. 44–46.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПРЕДДЕЙСТВИЕМ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

А. Н. Зарубин, Е. В. Чаплыгина

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

Аннотация. исследуется задача типа Коши для функционально-дифференциального уравнения дробного порядка в классе непрерывных по Гельдеру функций.

Ключевые слова: дробная производная, функция Миттаг-Леффлера, опережающе-запаздывающее уравнение, дифференциально-разностные уравнения.

Развитие теории уравнений в частных производных дробного порядка является важной задачей, так как основа большинства математических моделей, описывающих экономические и социально-биологические явления, — дифференциальные уравнения дробного порядка.

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение порядка α , $0 < \alpha < 1$, опережающе-запаздывающего типа

$$\sum_{k=-1}^1 [b_{k+1} D_0^\alpha y(x+k\tau) - a_{k+1} y(x-k\tau)] = 0, \quad 0 < x < 3\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

при начальных условиях

$$y(x) = r(x), \quad -\tau \leq x \leq 0, \quad (2)$$

$$y(x) = \rho(x), \quad 3\tau \leq x \leq 4\tau, \quad (3)$$

$$D_0^{\alpha-1} y(x) \Big|_{x=j\tau} = s_j \quad (j=0,1,2), \quad (4)$$

где $r(x)$, $\rho(x)$, α , s_j ($j=0,1,2$) — заданные функции и постоянные величины, причем

$$D_0^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\alpha} \quad (5)$$

дробная производная [1, с.43] порядка α , $0 < \alpha < 1$, Римана — Ли-увилля; $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция [2, с. 8].

Задача Т. Найти решение $y(x)$ уравнения (1) на промежутке $0 < x < 3\tau$ из класса H_α ($0 < \alpha < 1$), удовлетворяющее условиям (2)–(4), условию согласования $r(0) = D_0^{\alpha-1} y(0)$, где $r(x)$, $\rho(x)$, α , s_j ($j=0,1,2$) — заданные непрерывные достаточно гладкие функции и постоянные величины.

Теорема. Пусть функции $r(x)$, $\rho(x) \in H_\alpha$, $a_0 = a_2$, $a_1 > \sqrt{2}a_0 > 0$, $b_0 = b_2$, $b_1 > \sqrt{2}b_0 > 0$. Тогда решение задачи (1)–(4) в промежутке $0 < x < 3\tau$ существует, непрерывно и единственно.

Доказательство.

Опережающе-запаздывающее уравнение дробного порядка (1) сведем к системе трех уравнений дробного порядка без отклонений аргумента.

В терминах функций

$$y_k(x) = y(x), \quad x \in (x\tau, (k+1)\tau) \quad (k=0,1,2), \quad (6)$$

используя вектор

$$\bar{y}(x) = (y_0(x), y_1(x+\tau), y_2(x+2\tau))^T, \quad x \in (0, \tau), \quad (7)$$

с учетом условий (2), (3) и произведя замену x на $x+k\tau$ ($k=0,1,2$), уравнение (1) представим в форме системы трех уравнений относительно функций $y_k(x)$, $x \in (k\tau, (k+1)\tau)$ ($k=0,1,2$)

$$BD_0^\alpha \bar{y}(x) = A\bar{y}(x) + \bar{m}(x), \quad (8)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{m}(x) = \begin{pmatrix} -b_0 D_0^\alpha r(x-\tau) + a_2 r(x-\tau) \\ 0 \\ -b_2 D_0^\alpha \rho(x+3\tau) + a_0 \rho(x+3\tau) \end{pmatrix},$$

При $a_0 = a_2$, $a_1 > \sqrt{2}a_0 > 0$ и $b_0 = b_2$, $b_1 > \sqrt{2}b_0 > 0$ матрицы A и B [3, с. 46] являются симметрическими. Поэтому существует невырожденная матрица T , что

$$T^{-1}AT = \Lambda_A = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix};$$

$$T^{-1}BT = \Lambda_B = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_j = a_1 - (-1)^j j \sqrt{2} a_0 2^{1-j}$, $\beta_j = b_1 - (-1)^j j \sqrt{2} b_0 2^{1-j}$ ($j = 0, 1, 2$) — собственные значения соответственно матриц A и B , причем

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \overline{p_0} \\ \overline{p_1} \\ \overline{p_2} \end{pmatrix}.$$

Умножая слева матричное уравнение (8) на T^{-1} , учитывая $T^{-1}A = \Lambda_A T^{-1}$, $T^{-1}B = \Lambda_B T^{-1}$, после преобразований получим три уравнения дробного порядка без отклонений аргумента

$$D_0^\alpha q_j(x) = \frac{\lambda_j}{\beta_j} q_j(x) + h_j(x), \quad 0 < x < \tau \quad (j = 0, 1, 2), \quad (9)$$

где

$$q_j(x) = \langle \overline{p_j}, \overline{y}(x) \rangle, \quad h_j(x) = \frac{1}{\beta_j} \langle \overline{p_j}, \overline{m}(x) \rangle \quad (10)$$

скалярные произведения векторов, а

$$D_0^{\alpha-1} q_j(x) \Big|_{x=0} = c_j \quad (j = 0, 1, 2) \quad (11)$$

начальное условие, причем $c_j = \langle \overline{p_j}, \overline{s} \rangle$, $\overline{s} = (s_0, s_1, s_2)^T$.

Множество решений $q_j(x)$, $x \in (0, \tau)$ ($j = 0, 1, 2$) уравнений (10) содержит решения $y(x) = y_j(x)$, $x \in (j\tau, (j+1)\tau)$ ($j = 0, 1, 2$) уравнения (1), которые, в силу (6), (7), можно выделить из (10) в виде

$$\overline{y}(x) = T \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Таким образом, поставленная задача для опережающе-запаздывающего уравнения дробного порядка (1) в промежутке $0 < x < 3\tau$ сведена к трем задачам для трех уравнений дробного порядка (9) без отклонений в промежутке $0 < x < \tau$ относительно функций $q_j(x)$ ($j = 0, 1, 2$) вида (10).

Задача T_j . Найти на промежутке $0 < x < \tau$ решение $q_j(x) \in H_\alpha$ уравнения (9), $h_j(x) \in H_\alpha$, удовлетворяющее условию (11).

Лемма. Пусть функция $h_j(x) \in H_\alpha$ ($j = 0, 1, 2$), тогда решение задачи T_j (9), (10) при $0 < x < \tau$ существует, непрерывно и единственно.

Доказательство леммы производится аналогично [1, с. 597–602]. Искомое решение $q_j(x)$ задачи T_j для уравнения (9) при условии (11) имеет вид

$$q_j(x) = c_j x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{\lambda_j}{\beta_j} x^\alpha \right) + \int_0^x h_j(t) (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{\lambda_j}{\beta_j} (x-t)^\alpha \right) dt, \quad (13)$$

$0 < x < \tau$ ($j = 0, 1, 2$), где $E_{\alpha,\alpha}(z)$ — функция [1, с. 33] Миттаг-Леффлера.

Решение $q_j(x)$, $0 < x < \tau$ (13) задачи T_j , в совокупности с равенством (12), дает решение $y(x)$, $0 < x < 3\tau$ исходной задачи.

Теорема доказана.

Литература

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Кузнецов, Д. С. Специальные функции / Д. С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 248 с.
3. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – Москва : Наука, 1976. – 352 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

О. С. Зикиров, М. М. Сагдуллаева

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека

Аннотация. Нелокальная задача для нагруженного уравнения теплопроводности. В этой работе доказывается однозначное решение интегральной условно краевой задачи для уравнения параболического типа.

Ключевые слова: краевая задача, нелокальная задача, нагруженное уравнение, функция Грина, интегральные уравнения.

Различные классы нагруженных уравнений изучались в работах Кожанов А. И. [1], Джениалиев М. Т. [2]. Как близкие к настоящей работе, отметим статьи [3, 4] которые посвящены исследованию некоторых классов нагруженных уравнений параболического типа.

В области $D = \{(x, t): 0 < x < \ell, \quad 0 < t < T\}$ рассматривается уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) - \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $f(x, t)$ — заданные функции.

Требуется найти в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x, t) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

граничным

$$u_x(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и интегральным условием

$$\int_0^\ell u(x, t) dx = \int_0^t h(t, \tau) u_x(\ell, \tau) d\tau + \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$, $\psi_i(t)$, ($i = \overline{1, 2}$); $h(t, \tau)$ — заданные, непрерывные при $x \in [0, \ell]$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, t]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0) = \psi_1(0),$$

Через $C^{k, \ell}(D)$ обозначен класс функции $u(x, t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n} u(x, t) / \partial x^m \partial t^n$ для всех $m = 0, k$, $n = 0, \ell$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Под классом $C^{k, \nu}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\nu \in (0, 1)$.

Определение. Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x, t)$, из класса $C^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Основным результатом данной работы является следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема 1. Пусть $\varphi(x) \in C[0, \ell]$, $f(x, t) \in C(\overline{D})$, $\psi_1(t) \in C[0, T]$, $\psi_2(t) \in C^1[0, T]$ и $h(t, \tau) \in C^1([0, T]^2)$ $h(t, \tau) \neq 0$ для всех $t \in C[0, T]$. Тогда решение задачи (1)–(4) существует и единственно.

Литература

1. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1166–1179.
2. Джениалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы : Гылым. – 2010, 334 с.
3. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференциальные уравнения. – 2004. – 40:6. – С. 763–774.
4. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент : Фан, 1979. – С. 240.

ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. С. Канзеба

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной работе методом Фурье получено классическое решение смешанной задачи для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией и с потенциалом специального вида в случае двухточечных краевых условий. При этом на начальные данные задачи накладываются минимальные требования, следующие из постановки задачи. Условия на потенциал позволяют просуммировать формальное решение, найденное методом Фурье, и получить явное аналитическое представление для решения задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение.

В данной работе рассматривается смешанная задача для уравнения в частных производных, содержащего инволюцию $\nu(x) = 1 - x$. Инволюцией называется такое отображение, что $\nu(\nu(x)) = x$. Инволюция рассматриваемого типа порождает оператор отражения, и встречается, например, в задачах классической механики. Активно исследуются как краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с такой инволюцией (см., например, работы [1–3] и библиографию в них), так и задачи для уравнений в частных производных [4–8].

1. Постановка задачи

Будем рассматривать следующую задачу с двухточечными краевыми условиями:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x, t) + q_2(x)u(1-x, t), \quad t \in (-\infty, +\infty), x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$u(0, t) = \gamma u(1, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3)$$

Здесь γ — комплексное число, $q_1(x)$, $q_2(x)$ — некоторые непрерывные комплексные функции. Далее будут определены условия на $q_j(x)$, при которых решение можно получить в явном виде.

Уравнение (1) представляет собой уравнение в частных производных, содержащее инволюцию $\nu(x) = 1 - x$ в самой функции $u(x, t)$ и в ее производной и обобщает уравнения из [4, 5, 7] (где $q_2(x) = 0$). Задача для уравнения (1), но с частными краевыми условиями (закрепленный конец) рассматривалась в [6].

Решение будем искать в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обоим переменным в полосе $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$. Считаем, что $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным условиям, следующим из постановки задачи:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^1[0, 1], \quad \varphi(0) = \gamma\varphi(1), \\ \varphi'(1) - \gamma\varphi'(0) + \gamma\varphi(1)(q_1(0) - q_1(1)) + \varphi(1)(q_2(0) - \gamma^2 q_2(1)) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно методу Фурье, положив в уравнении (1) $u(x, t) = y(x)T(t)$, получим следующую спектральную задачу для $y(x)$:

$$y'(1-x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y(1-x) = \lambda y(x), \quad y(0) = \gamma y(1), \quad (5)$$

а для $T(t)$ имеем $T(t) = e^{\lambda it}$.

2. Спектральная задача

Так же как в [4–7], исследование задачи (5) сводится к исследованию задачи в пространстве вектор-функций, проводится преобразование полученной системы. Всюду далее в работе считаем выполненным условие регулярности по Биркгофу $\gamma^2 + 1 \neq 0$.

Лемма 1. Число λ является собственным значением, а $y(x)$ собственной функцией краевой задачи (5) тогда и только тогда, когда $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ является ненулевым решением матричного уравнения

$$Bz'(x) + Q(x)z(x) = \lambda z(x), \quad (6)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(1-x) & q_1(1-x) \end{pmatrix}$, удовлетворяющим условиям $z_1(0) = \gamma z_2(0)$, $z_1(1/2) = z_2(1/2)$.

Замена $z(x) = \Gamma v(x)$, где $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ приводит уравнение (6) к виду:

$$v'(x) + P(x)v(x) = \lambda Dv(x), \quad (7)$$

где $D = \Gamma^{-1}B^{-1}\Gamma = \text{diag}(-i, i)$, $P(x) = \Gamma^{-1}B^{-1}Q(x)\Gamma$.

Решение уравнения (7) в общем случае может быть найдено только в асимптотической форме или численными методами. Но в частных случаях его можно получить в явном виде. Более того, такие частные случаи представляют интерес, так как служат вспомогательными (эталонными) задачами для задачи с произвольным потенциалом (см., например, [6]).

Далее будем считать, что $q_1(x)$, $q_2(x)$ непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$q_1(x) = q_1(1-x), \quad q_2(x) = -\overline{q_2(1-x)}. \quad (8)$$

Тогда в уравнении (7) $P(x) = \text{diag}(iq_1(x) - q_2(x), -iq_1(x) - q_2(x))$, и (7) распадается на два уравнения, решая которые, получим

Лемма 2. Собственные значения задачи (5) простые и имеют вид $\lambda_n = 2\pi n + a$, $n \in \mathbb{Z}$, где $a = \int_0^1 q_1(t)dt - iM$, $M = \ln \frac{1-\gamma i}{\gamma-i}$ (под $\ln z$ понимается главное значение $\text{Ln } z$, при $\arg z \in [-\pi; \pi]$), а соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_n(x) = \left(m(x)e^{\lambda_n i x} + im(1-x)e^{\lambda_n i(1-x)} \right) v(x),$$

где $m(x) = e^{-i \int_0^x q_1(\tau) d\tau}$, $v(x) = e^{\int_0^x q_2(\tau) d\tau}$.

Система $\{y_n(x)\}$, вообще говоря, не является ортогональной. В данной работе для простоты потребуем выполнение следующих дополнительных условий

$q_1(x)$ — вещественная и непрерывная функция, и $q_1(x) = q_1(1-x)$,
 $q_2(x) = is(x)$, $s(x)$ — вещественная функция, и $s(x) = -s(1-x)$, число iM — вещественное (9)

Тогда справедливы (8) и лемма 1, а система $\{y_n(x)\}$ ортогональна. Более общий случай (когда для $q_j(x)$ требуем только (8)) исследуется с привлечением биортогональной системы (см., например, [7]).

3. Формула для решения задачи

При выполнении (9) условия (4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^1[0,1], & \varphi(0) &= \gamma \varphi(1), \\ \varphi'(1) - \gamma \varphi'(0) + \varphi(1)q_2(0)(1+\gamma^2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Формальное решение задачи (1)–(3) есть

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n i t}, \quad c_n = \frac{1}{2}(\varphi, y_n).$$

Так же как в [4–7] можно показать, что этот ряд равномерно сходится по $x \in [0,1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Однако, для почленного дифференцирования данного ряда условий (4) уже недостаточно. Преобразуя этот ряд, и вводя вспомогательную функцию, которая является суммой некоторого ряда по тригонометрической системе, получим основной результат работы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (9), (10), и $1 + \gamma^2 \neq 0$. Тогда классическое решение задачи (1)–(3) существует и имеет вид:

$$u(x, t) = [ip(1-x)f_0(1-x+t) + p(x)f_0(x+t)]e^{ait},$$

где $f_0(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, периодическая с периодом $T=1$, которая при $x \in [0, 1]$ определена по формуле:

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)}[\varphi(x) - i\varphi(1-x)],$$

$$p(x) = e^{iax + \int_0^x (-iq_1(\tau) + q_2(\tau))d\tau}, \quad a = \int_0^1 q_1(\tau)d\tau - iM, \quad M = \ln \frac{1-\gamma i}{\gamma-i}.$$

Литература

1. Андреев, А. А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом / А. А. Андреев // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 1126–1128.
2. Бурлуцкая, М. Ш. Функционально-дифференциальный оператор с Инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. С. Луконина, А. П. Хромов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 414, № 4. – С. 1309–1312.
3. Владыкина, В. Е. Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией / В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. – 2019. – Т. 106, № 5. – С. 643–659.
4. Бурлуцкая, М. Ш. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 435, № 2. – С. 151–154.
5. Хромов, А. П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида / А. П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, вып. 4. – С. 17–22.
6. Бурлуцкая, М. Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией / М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 12. – С. 2233–2246.
7. Бурлуцкая, М. Ш. Классическое решение смешанной задачи для уравнения с инволюцией и двухточечными краевыми условиями / М. Ш. Бурлуцкая, С. А. Чередникова // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. – 2016. – № 3. – С. 71–79.
8. Баскаков, А. Г. Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов / А. Г. Баскаков, Н. Б. Ускова // Уфимск. матем. журн. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 11–34.

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Ш. Т. Каримов, З.Х. Комилова

Ферганский государственный университет

Аннотация. В работе исследован аналог задачи Гурса для одного неклассического уравнения в частных производных четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами. Для решения задачи применён метод операторов преобразования. В качестве оператора преобразования использован двумерный обобщённый оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка. Решение задачи построено в явном виде.

Ключевые слова: оператор преобразования, обобщенный оператор Эрдейи — Кобера, оператор Бесселя, функция Бесселя — Клифорда, нормированная функция Бесселя, многомерный оператор Лапласа.

В настоящее время развитие современных технологий приводят к необходимости исследования качественно новых процессов возникающих в науке и технике. В связи с этим возникает необходимость построения адекватных математических моделей и их дальнейшее изучение, которые приводит к неклассическим дифференциальным уравнениям. Например, математическая модель линейных волн в «незамагниченной» плазме описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - u) + \Delta u = 0,$$

где $\Delta \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ — многомерный оператор Лапласа, функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ представляет обобщенный потенциал электрического поля. В работе [1] исследована более общая математическая модель линейных волн в плазме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u - \lambda_1 u) + a(\Delta u - \lambda_2 u) = 0, \quad (1)$$

с различными начально-краевыми условиями, где $\lambda_1, \lambda_2, a \in \mathbb{R}$.

К подобным уравнениям и системам уравнений приводят математические модели колебаний в молекуле ДНК [2], линеаризованная математическая модель Benney — Luke [3], математические модели Буссинеска — Лява [4] и другие.

В частности к неклассическим дифференциальным уравнениям относятся модели, описываемые уравнениями смешанного типа, вырождающиеся уравнения и уравнения Соболевского типа. Уравнения Соболевского типа, иначе называемые уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной, после известной работы Соболева [5] является объектом исследования для многих авторов.

В области теории уравнений Соболевского типа активно работают Р. Е. Шоултер, А. Фавини, А. Яги, Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, Н. В. Сидоров, М. В. Фалалеев, М. О. Корпусов, И. В. Мельникова, С. Г. Пятков, А. И. Кожанов, Г. А. Свиридчук, Т. Г. Сукачева, В. Е. Федоров и другие. Обзор этих исследований можно найти в монографиях [6–7].

Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в классическом смысле аналога задачи Гурса для уравнения

$$L_{\alpha, \beta}^{\lambda_1, \lambda_2}(u) = P_{\alpha, \beta}(u) - \lambda_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

где $P_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{2\beta}{y} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{4\alpha\beta}{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$,
 $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in R$, причем $0 < \alpha, \beta < 1/2$.

Это уравнение относится к классу уравнений с сингулярными коэффициентами, так как коэффициенты данного уравнения имеют сингулярную особенность на линиях $x=0$ и $y=0$. Кроме того, линии сингулярности одновременно являются двукратными характеристиками данного уравнения.

Параметры α и β входящее в уравнение (2), определяют порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha=0$, $\beta=0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение типа (1), а при $\alpha=(n-1)/2$, $\beta=0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ в сферической системе координат.

При $\lambda_1 = i\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$ уравнение (2) можно представить в виде

$$L_{\alpha,\beta}^{i\lambda,\lambda}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) + \lambda^2 H_{\alpha,\beta}^\lambda(u) - \lambda^4 u = 0 \quad (3)$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$L_{\alpha,\beta}^\lambda(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) + \lambda^2 h_{\alpha,\beta}^\lambda(u) - \lambda^4 u = 0, \quad (4)$$

где $H_{\alpha,\beta}^\lambda$ — дифференциальный оператор обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$H_{\alpha,\beta}^\lambda(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\beta}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u,$$

а $h_{\alpha,\beta}^\lambda$ — соответствующий ему дифференциальный оператор гиперболического типа

$$h_{\alpha,\beta}^\lambda(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\beta}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u.$$

Двумерные уравнения четвертого порядка рассматривались в работах М. С. Салахитдинова, Т. Д. Джураева, А. М. Нахушева, В. И. Жегалова, В. Ф. Волкодавова, А. И. Кожанова, А. П. Солдатова и их учеников. В работе Т. Д. Джураева и А. Сопуева [8] исследованы вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду общего линейного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В данной работе в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$ исследуется аналог задачи Гурса для уравнения (2).

Задача G. Требуется найти функцию $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h; \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $\varphi_k(y)$, $\psi_k(x)$, ($k=1, 2$) заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(0) = 0$.

Задача G при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ исследована в работе [9].

В силу линейности уравнения (2) сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача G₀. Требуется найти функцию $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

где $\varphi_1(y)$, $\psi_1(x)$ — заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_1'(0) = 0$, $\psi_1'(0) = 0$.

Для решения поставленной задачи (7)–(8) применим метод операторов преобразования [10–13]. В качестве оператора преобразования используем двумерный обобщённый оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка.

В работах [14, 15] был введен многомерный обобщенный оператор Эрдейи — Кобера

$$J_\lambda \left(\begin{matrix} \alpha \\ p \end{matrix} \right) f(x) = J_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ p_1, \dots, p_n \end{matrix} \right) f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k + p_k)}}{\Gamma(\alpha_k)} \right] \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \prod_{k=1}^n \left[\frac{\bar{J}_{\alpha_k-1}(\lambda_k \sqrt{x_k^2 - t_k^2})}{(x_k^2 - t_k^2)^{1-\alpha_k}} t_k^{2p_k+1} \right] f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n, \quad (9)$$

исследованы его свойства и их приложение к многомерным уравнениям гиперболического [14] и параболического [15] типов с сингулярными коэффициентами, где $\alpha_k > 0$, $p_k \geq -1/2$, $k = 1, n$, $\bar{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда (или нормированная функция Бесселя) [13], которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$, $\Gamma(\nu)$ — гамма функция [16].

Интеграл (9) является многомерным аналогом одномерного обобщенного оператора Эрдейи — Кобера с функцией Бесселя в ядре [17].

Для интеграла (9) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\alpha_k > 0$, $p_k \geq -1/2$, $k = 1, n$, $f(x) \in C^{2n}(\Omega_n)$, $x_k^{2p_k+1} B_{p_k}^{x_k} f(x)$ — интегрируемы в окрестности $x_k = 0$ и $\lim_{x_k \rightarrow 0} x_k^{2p_k+1} f_{x_k}(x) = 0$, $k = 1, n$. Тогда имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^n (B_{p_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2) J_\lambda \left(\begin{matrix} \alpha \\ p \end{matrix} \right) f(x) = J_\lambda \left(\begin{matrix} \alpha \\ p \end{matrix} \right) \prod_{k=1}^n B_{p_k}^{x_k} f(x),$$

где $\Omega_n = \prod_{k=1}^n (0, a_k)$ — декартово произведение, $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$,

$$B_{p_k}^{x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2p_k+1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ — оператор Бесселя по переменной } x_k.$$

Теорема верна и при некоторых или всех $\lambda_k = 0$, $k = \overline{1, m}$, $m \leq n$.

Данная теорема позволяет применить оператор (9) как оператор преобразования, позволяющий преобразовать уравнения высокого четного порядка с сингулярными коэффициентами в уравнения без сингулярных коэффициентов. Этот факт применим для исследования задачи G_0 для уравнения (3) и (4).

Предположим, что решение задачи G_0 существует. Это решение ищем в виде

$$u(x, y) = J_{\lambda_1, \lambda_2} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right) U(x, y), \quad (10)$$

где $U(x, y)$ — неизвестная дифференцируемая функция.

Подставляя (10) в уравнение (3) и (4) и краевым условиям (7)–(8), а затем используя теорему при $n = 2$, $p_1 = p_2 = -1/2$, получим задачу нахождения решения $U(x, y)$ уравнения

$$U_{xyxy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (11)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x, 0) = \Psi_1(x), \quad U_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (12)$$

$$U(0, y) = \Phi_1(y), \quad U_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (13)$$

где

$$\Phi_1(y) = A_0 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y^2 - s^2)^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left(\lambda_2 \sqrt{y^2 - s^2} \right) s^{2\beta} \varphi_1(s) ds = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} J_{\lambda_2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}, \beta \right) \varphi_1$$

$$\Psi_1(x) = B_0 \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\alpha} \bar{I}_{-\alpha} \left(\lambda_1 \sqrt{x^2 - s^2} \right) s^{2\alpha} \varphi_1(s) ds = \frac{\Gamma(\beta + 1/2)}{\sqrt{\pi}} J_{\lambda_1}^{-1} \left(-\frac{1}{2}, \alpha \right) \psi_1$$

$$A_0 = \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) / \left[\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \beta) \right], \quad B_0 = \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) / \left[\sqrt{\pi} \Gamma(1 - \alpha) \right].$$

Решая задачу (11)–(13) находим функцию $U(x, y)$, а затем подставляем это решение в (10), при $\lambda_1 = i\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$ получим решение задачи (3), (5), (6) в виде

$$u(x, y) = \psi_1(x) \bar{J}_{\beta-1/2}(\lambda y) + \varphi_1(y) \bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x) - \varphi_1(0) \bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x) \bar{J}_{\beta-1/2}(\lambda y) +$$

$$+ \psi_2(x) \frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta} \bar{J}_{\beta+1/2}(\lambda y) + \varphi_2(y) \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \bar{J}_{\alpha+1/2}(\lambda x).$$

Аналогично подставляя решение задач (11)–(13) в (10), при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получим решение задач (4), (5), (6) в виде

$$u(x, y) = \psi_1(x) \bar{I}_{\beta-1/2}(\lambda y) + \varphi_1(y) \bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x) - \varphi_1(0) \bar{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x) \bar{I}_{\beta-1/2}(\lambda y) +$$

$$+ \psi_2(x) \frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta} \bar{I}_{\beta+1/2}(\lambda y) + \varphi_2(y) \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \bar{J}_{\alpha+1/2}(\lambda x), \quad \text{где} \quad \bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(iz).$$

Литература

1. Габов, С. А. Математические основы линейной теории ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме / С. А. Габов // Матем. Моделирование. – 1989. – Т. 1, № 12. – С. 133–148.
2. Cristiansen, P. L. On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom / P. L. Cristiansen, V. Muto, P. S. Lomdahl // Nonlinearity. – 1990. – No 4. – P. 477–501.
3. Benney, D. J. Interactions of permanent waves of finite amplitude / D. J. Benney, J. C. Luke // J. Math. Phys. – 1964. – No 43. – P. 309–313.
4. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – Москва : ОНТИ, 1935.
5. Соболев, С. Л. Об одной краевой задаче математической физики / С. Л. Соболев // Изв. АН СССР, Сер. Матем. – 1954. – Т. 18, № 2. – С. 3–50.
6. Свешников, А. Г. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. Ю. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007.
7. Kozhanov, A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems / A. I. Kozhanov. – Utrecht : VSP, 1999.
8. Джураев, Т. Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка / Сопуев А. – Тошкент : ФАН. 2000, 144 с.
9. Каримов, Ш. Т. Приложение многомерного оператора Эрдейи – Кобера к решению аналога задачи Гурса для уравнения четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами / Ш. Т. Каримов // УзМЖ. – 2016. – № 4. – С. 73–83.
10. Carroll, R. Transmutation Theory and Applications / R. Carroll. – North Holland, 1986. – 351 p.
11. Kiryakova, V. Generalized Fractional Calculus and Applications / V. Kiryakova. Longman Sci. & Technical and J. Wiley & Sons, -Harlow and N. York, 1994. – 387 p.
12. Катрахов, В. В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В. В. Катрахов, С. М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. – Москва, 2018. – Т. 64, № 2. – С. 211–426.

13. Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – М. : Физматлит, 2019. – 224 с.
14. Karimov, Sh. T. Multimedinsional generalized Erde'ly-Kober operator and its application to solving Cauchy prodllems for differential equations with singular coefficients / Sh. T. Karimov // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2015. – V.18, No 4. – P. 845–861.
15. Karimov, Sh. T. On some generalizations of the Properties of the Multimedinsional generalized Erde'ly-Kober operator and their applications in transmutation operators andapplications, Ed by V. Kravchenko and S. M. Sitnik // Sh. T. Karimov and S. M. Sitnik // Trends in Mathematics Springer, 2020. – P. 85–115.
16. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Т. 1. – М. : Наука, 1973. – 296 с.
17. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 702 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА ДВУМЕРНОЙ СЕТИ

Л. А. Ковалева

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. В пространстве рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа на двумерной сети, которая состоит из выпуклых плоских многоугольников. Получена формула для подсчета значения индекса задачи в пространствах Гельдера с весом $C_{-0}^{\mu}(K, F)$ и $C_{+0}^{\mu}(K, F)$.

Ключевые слова: задача Дирихле, индекс задачи, двумерная сеть.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим конечное множество $\mathcal{M}$ плоских выпуклых многоугольников M , которые попарно могут пересекаться только по своим сторонам. Совокупность отрезков L , являющихся сторонами одного или нескольких многоугольников, обозначим $\mathcal{L}$, а множество их концов — F . Объединение K многоугольников $M \in \mathcal{M}$, рассматриваемых как замкнутые подмножества $\mathbb{R}^3$, называется двумерным комплексом, и сетью, если дополнительно каждый отрезок $L \in \mathcal{L}$ может служить границей не более двух многоугольников. По отношению к K элементы $M \in \mathcal{M}$ называем гранями, а элементы $L \in \mathcal{L}$ — сторонами или ребрами в зависимости от того, входит L в границу одной или нескольких граней. Удобно еще с каждым элементом $L \in \mathcal{L}$ связать совокупность $\mathcal{M}_L$ всех граней, граничащих с L .

Пусть подмножество $K^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ означает объединение всех отрезков $L \in \mathcal{L}$, взятых без своих концов, так что замкнутое множество $F \cup K^1$ представляет собой ломаную в $\mathbb{R}^3$. Аналогично под K^2 условимся понимать объединение всех граней, взятых без своей границы. Множество $\mathcal{L}$ всех ребер разобьем на два попарно непересекающихся подмножества $\mathcal{L}_D$ и $\mathcal{L}_H$, первое из которых состоит из некоторого подмножества сторон. Соответствующие объединения этих ребер, взятые без своих концов, обозначим K_D^1 и K_H^1 . Аналогично пусть F_D состоит из точек, являющихся концами отрезков $L \in \mathcal{L}_D$. Тогда $F_H = F \setminus F_D$ состоит из точек τ , для которых все отрезки $L \in \mathcal{L}$ с этим концом принадлежат $\mathcal{L}_H$.

Следуя [1], функцию $u(x) \in C(K \setminus F)$ назовем гармонической на множестве $K^2 \cup K_H^1$, если внутри каждой грани $M \in \mathcal{M}_L$ она гармонична, непрерывно дифференцируема вплоть до внутренних точек отрезка L и сумма нормальных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_M},$$

взятых изнутри M , равна нулю:

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_L} \frac{\partial u}{\partial \nu_M} \Big|_L = 0.$$

Задача Дирихле (задача D) заключается в отыскании гармонической на $K^2 \cup K_H^1$ функции $u \in C(K \setminus F)$ по краевому условию

$$u \Big|_{K_D^1} = f, \quad (1)$$

где правая часть $f \in C(K_D^1)$ задана.

Эта задача подробно изучена в [1] в семействе весовых гильбертовых пространств $C_{\lambda}^{\mu}(K, F)$ на произвольном двумерном комплексе. Случай двумерной сети, рассматриваемый в данной работе, позволяет несколько дополнить результаты указанной работы.

Напомним определение пространства $C_{\lambda}^{\mu}(K, F)$, $0 < \mu < 1$, с весовым порядком $\lambda \in \mathbb{R}$. Исходя из весовой функции

$$\rho_\lambda(z) = \prod_{\tau \in F} |x - \tau|^\lambda$$

этого порядка, пространство $C_\lambda^\mu(K; F)$ определим как класс всех функций $\varphi \in C(K \setminus F)$, для которых функция $\psi = \rho_{\mu-\lambda}\varphi$ принадлежит классу Гельдера $C^\mu(K)$ и обращается в нуль в точках $\tau \in F$. В частности, функция $\varphi(x)$ ведет себя как $O(|x - \tau|^{\lambda_\tau})$ при $x \rightarrow \tau$. Относительно нормы $|\varphi| = |\psi|_{C^\mu}$ это пространство банахово и с возрастанием λ семейство (C_λ^μ) монотонно убывает по вложению, так что можно ввести классы

$$C_{\lambda-0}^\mu = \bigcap_{\varepsilon>0} C_{\lambda-\varepsilon}^\mu, \quad C_{\lambda+0}^\mu = \bigcup_{\varepsilon>0} C_{\lambda+\varepsilon}^\mu.$$

Заметим, что произведение $\varphi\psi$ двух функций $\varphi \in C_{\lambda+0}^\mu$ и $\psi \in C_{\nu+0}^\mu$ принадлежит $C_{\lambda+\nu+0}^\mu$. При $\lambda = 0$ эти классы обозначаем кратко $C_{\pm 0}^\mu$. Очевидно, функции $\varphi \in C_{-0}^\mu$ допускают особенности сколь угодно малого порядка (т. е. логарифмического типа), а каждая функция $\varphi \in C_{+0}^\mu$ принадлежит C_ε^μ с некоторым малым $\varepsilon > 0$.

Удобно кроме того ввести конечномерное расширение $C_{(+0)}^\mu$ последнего класса путем добавления гладких функций, постоянных в окрестности точек $\tau \in F$. Аналогичный смысл имеют классы $C_{\pm 0}^\mu(K_D^1, F_D)$ и $C_{(+0)}^\mu(K_D^1, F_F)$ на K_D^1 . Ясно, что сужение функции $u \in C_\lambda^\mu(K, F)$ на K_D^1 принадлежит $C_\lambda^\mu(K_D^1, F_D)$, так что можно говорить о фредгольмовости задачи (1) для функций, гармонических на K_H^2 . Более точно, по определению эта задача фредгольмова в пространстве C_λ^μ , если однородная задача (с $f = 0$) в этом классе имеет конечное число линейно независимых решений $u_1, \dots, u_n$ и существуют такие линейно независимые функции $g_1, \dots, g_m \in C_{-\lambda-1-0}^\mu(K_D^1, F_D)$, что условия ортогональности

$$\int_{K_D^1} f(y) g_k(y) d_1 y = 0, \quad 1 \leq k \leq m,$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной задачи (1) в этом классе. Заметим, что произведение $f g_k$ под знаком интеграла принадлежит классу C_{-1+0}^μ , так что интеграл имеет смысл.

Разность $\mathfrak{x} = n - m$ называется индексом задачи. Конечномерное пространства, натянутые на функции u_j и g_j , называются, соответственно, ядром $\ker D$ и коядром $\operatorname{coker} D$ задачи D .

В дальнейшем главный интерес представляют классы $C_{\pm 0}^\mu$ и $C_{(+0)}^\mu$, в которых будет рассматриваться задача. Ее фредгольмовость в классе $C_{\pm 0}^\mu$ определяется аналогично предыдущему с функциями g_k в (2), принадлежащими $C_{-1\mp 0}^\mu$. Что касается класса $C_{(+0)}^\mu$, то он является конечномерным расширением C_{+0}^μ и потому свойством фредгольмовости в этих классах задача Дирихле обладает одновременно.

Очевидно, пространство $C_{(+0)}^\mu(K, F)$ является расширением C_{+0}^μ на n измерений, где n — число элементов F . Точно также пространство $C_{(+0)}^\mu(K_D^1, F_D)$ является расширением C_{+0}^μ на n_D измерений, где n_D — число элементов F_D . Поэтому индексы $\mathfrak{x}_{+0}$ и $\mathfrak{x}_{(+0)}$ задачи Дирихле в соответствующих пространствах связаны соотношением $\mathfrak{x}_{(+0)} = \mathfrak{x}_{+0} + n - n_D$. Поскольку $F_H = F \setminus F_D$, разность $n - n_D$ есть число n_H элементов множества F_H , так что окончательно

$$\mathfrak{x}_{(+0)} = \mathfrak{x}_{+0} + n_H.$$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. Пусть комплекс K является двумерной сетью. Тогда индекс задачи Дирихле в пространствах $C_{-0}^\mu(K, F)$ и $C_{+0}^\mu(K, F)$ принимает, соответственно, значения $\mathfrak{x}_{-0} = n_H$ и $\mathfrak{x}_{+0} = n_H$. В частности, индекс $\mathfrak{x}_{(+0)} = 0$ этой задачи в классе $C_{(+0)}^\mu(K, F)$ равен нулю.

Литература

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах // Известия РАН, сер. Матем. — 2015. — Т. 79, № 1. — С. 77–114.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

О. Г. Корольков

Воронежский государственный университет

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию явления вынужденных колебаний линейного осциллятора под действием осциллятора Ван дер Поля. Описывается метод, основанный на применении метода малого параметра Пуанкаре и замене Боголюбова — Штокало и позволяющий получить характеристики вынужденных колебаний. Рассматриваются случаи синфазных колебаний и колебаний в противофазе. Приводится численный пример, демонстрирующий справедливость полученных результатов.

Ключевые слова: автоколебания, вынужденные колебания, асимптотические методы, метод малого параметра, замена Боголюбова — Штокало.

Введение

Вынужденными колебаниями называют колебания некоторой системы, обусловленные действием некоторой периодической силы. Вынужденные колебания рассматриваются и применяются в различных областях науки и техники. Примерами могут служить колебания гребных винтов, лопаток турбины, мостов и т. д.

В настоящей работе исследуются вынужденные колебания линейного осциллятора под действием осциллятора Ван дер Поля. Данная модель пригодна для описания, например, колебательного контура, на который подаётся напряжение, исходящее от генераторов Ван дер Поля. Применяются асимптотические методы, ранее разработанные и применённые для исследования задачи о синхронизации автоколебаний [1–4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух осцилляторов: затухающего линейного осциллятора (1) и осциллятора Ван дер Поля (2), колебания которого подаются на первый осциллятор:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = \nu u, \quad (1)$$

$$\ddot{u} - 2\mu(1 - u^2)\dot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (2)$$

где $x = x(t)$, $u = u(t)$; $\omega > 0$ — угловая частота осциллятора (2); малые параметры $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ характеризуют форму колебаний обоих осцилляторов, а малый параметр $\nu > 0$ характеризует силу воздействия второго осциллятора на первый. Для применения асимптотических методов к исследованию данной задачи целесообразно определить соотношения между малыми параметрами. Рассматриваемые методы справедливы при различных соотношениях, но в настоящей работе эти соотношения задаются следующим образом:

$$\mu = M\varepsilon,$$

$$\nu = N\varepsilon^{1/2},$$

где $M > 0$, $N \neq 0$. Кроме того, в настоящей работе предполагается, что угловые частоты двух осцилляторов достаточно близки в следующем смысле:

$$\omega = 1 + W\varepsilon^{1/2},$$

где W — вещественное число. Заметим, что при чрезмерном сближении угловых частот осцилляторов в системе может возникнуть явление резонанса, поэтому в данной работе мы будем отслеживать амплитуду колебаний осциллятора (1).

Выполнив полярную замену

$$x = r \cos \alpha, \quad \dot{x} = -r \sin \alpha, \quad u = \rho \cos \alpha, \quad \dot{u} = -\rho \sin \alpha, \quad (3)$$

мы вводим в рассмотрение амплитуды колебаний $r = r(t)$, $\rho = \rho(t)$ и фазы $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ рассматриваемых систем. Выполнив ещё одну замену

$$\alpha = \beta + \varphi, \quad (4)$$

мы вводим в рассмотрение разность фаз $\varphi = \alpha(t) - \beta(t)$ рассматриваемых систем.

Цель настоящей работы — описать метод, позволяющий установить, имеют ли место в системе (1)–(2) вынужденные колебания осциллятора (1), а также определить их амплитуду. Под вынужденными колебаниями мы будем понимать следующее: в полученной системе существует орбитально-устойчивый предельный цикл, для которого разность фаз $\varphi(t)$ стремится при $t \rightarrow \infty$ к некоторому фиксированному числу.

2. Описание используемых методов решения поставленной задачи

После замен (3) и (4), а также перехода от времени t к фазовой переменной β система (1)–(2) запишется следующим образом:

$$\frac{dr}{d\beta} = F_r(r, \rho, \varphi, \beta, \varepsilon), \quad \frac{d\rho}{d\beta} = F_\rho(r, \rho, \varphi, \beta, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\beta} = F_\varphi(r, \rho, \varphi, \beta, \varepsilon), \quad (5)$$

где функции F_r, F_ρ, F_φ 2π -периодичны по фазовой переменной β и могут быть легко вычислены.

Далее, выполняя поиск 2π -периодического решения системы (5) в виде рядов по $\varepsilon^{1/2}$ в соответствии с [5], мы найдём два решения:

$$r_1^*(\beta, \varepsilon) = -\frac{N}{W} + \varepsilon^{1/2} \frac{N}{2} \cos 2\beta + O(\varepsilon), \quad \rho_1^*(\beta, \varepsilon) = 2 + O(\varepsilon), \quad (6)$$

$$\varphi_1^*(\beta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left(\frac{W}{2} \sin 2\beta + \frac{1}{W} \right) + O(\varepsilon);$$

$$r_2^*(\beta, \varepsilon) = \frac{N}{W} - \varepsilon^{1/2} \frac{N}{2} \cos 2\beta + O(\varepsilon), \quad \rho_2^*(\beta, \varepsilon) = 2 + O(\varepsilon), \quad (7)$$

$$\varphi_2^*(\beta, \varepsilon) = \pi + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{W}{2} \sin 2\beta + \frac{1}{W} \right) + O(\varepsilon).$$

Очевидно, 2π -периодическое решение (6), соответствующее нулевой разности фаз, может быть определено при $NW < 0$, тогда как 2π -периодическое решение (7), соответствующее разности фаз, равной π , может быть определено при $NW > 0$. Заметим, что в случае $W = 0$, соответствующем резонансу, 2π -периодическое решение системы (5) не может быть найдено. При этом, несмотря на близость собственных частот осцилляторов, резонанса в системе (1)–(2) не будет, если параметры N и W — одного порядка.

Исследование устойчивости найденных решений сводим к исследованию устойчивости нулевого решения линеаризованной системы, выполнив замену

$$\bar{r} = r - r_i^*(\beta, \varepsilon), \quad \bar{\rho} = \rho - \rho_i^*(\beta, \varepsilon), \quad \bar{\varphi} = \varphi - \varphi_i^*(\beta, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где $\bar{r} = \bar{r}(\beta)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\beta)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\beta)$.

Наконец, выполняя замену Боголюбова — Штокало [6], получаем систему уравнений с постоянными коэффициентами, устойчивость нулевого решения которой определяется согласно критерию Рауса — Гурвица. Для обоих решений характеристический полином записывается следующим образом:

$$\lambda^2 + 2\varepsilon^{1/2}\lambda + W^2 + O(\varepsilon^{1/2}) = 0,$$

что говорит об устойчивости найденных 2π -периодических решений (6) и (7).

Итак, при $W \neq 0$, $N \neq 0$ одного порядка в системе (1)–(2) имеют место вынужденные колебания осциллятора (1) с амплитудой $\left|\frac{N}{W}\right|$. Если при этом $NW < 0$, то вынужденные колебания происходят синфазно с колебаниями осциллятора (2), а в случае $NW > 0$ — в противофазе.

3. Вычислительный эксперимент

На рис. 1 и 2 представлены графики амплитуды вынужденных колебаний и разности фаз в системе (1)–(2) с параметрами

$$M = 0.5, \quad N = 0.5, \quad W = -0.5, \quad \varepsilon = 0.1.$$

Как видно из рис. 2, в системе имеют место вынужденные колебания, которые происходят синфазно с осциллятором (2).

На рис. 3 и 4 представлены графики амплитуды вынужденных колебаний и разности фаз в системе (1)–(2) с параметрами

$$M = 0.5, \quad N = 0.5, \quad W = 0.5, \quad \varepsilon = 0.1.$$

Как видно из рис. 4, в системе имеют место вынужденные колебания, которые происходят в противофазе с осциллятором (2).

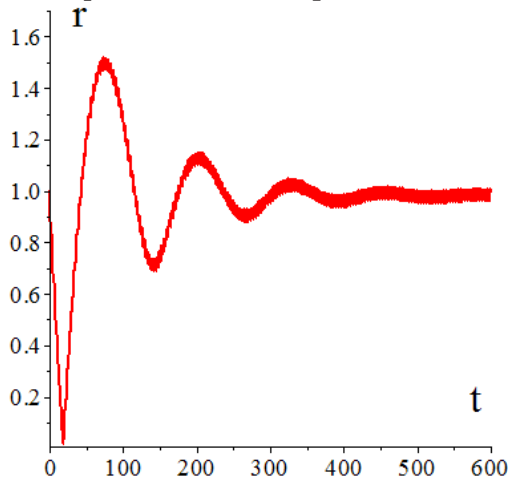


Рис. 1. Амплитуда вынужденных колебаний при $M = 0.5, N = 0.5, W = -0.5, \varepsilon = 0.1$

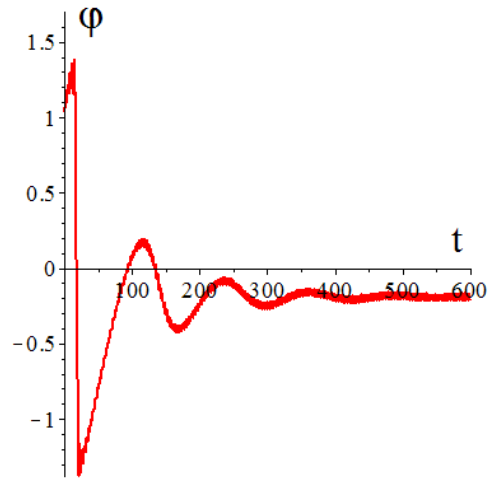


Рис. 2. Разность фаз в системе (1)–(2) при $M = 0.5, N = 0.5, W = -0.5, \varepsilon = 0.1$

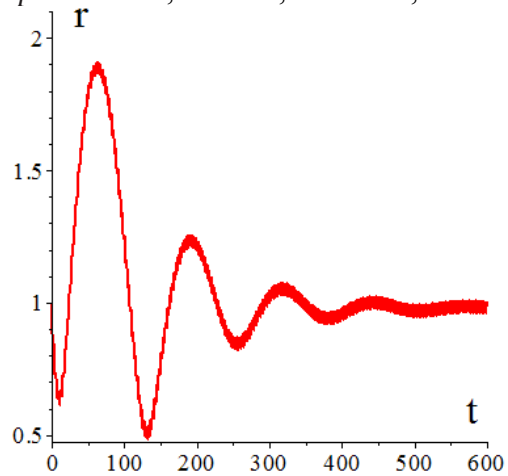


Рис. 3. Амплитуда вынужденных колебаний при $M = 0.5, N = 0.5, W = 0.5, \varepsilon = 0.1$

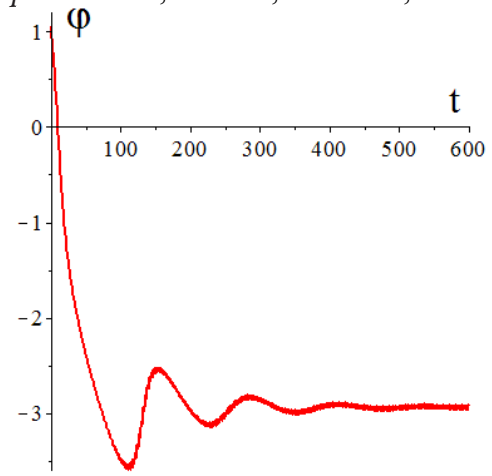


Рис. 4. Разность фаз в системе (1)–(2) при $M = 0.5, N = 0.5, W = 0.5, \varepsilon = 0.1$

Заключение

В настоящей работе описан метод исследования вынужденных автоколебаний линейного осциллятора в случае, когда частоты обоих осцилляторов достаточно близки. Исследованы синфазные колебания и колебания в противофазе, определены условия, при которых система не входит в резонанс. Описанный метод может быть модифицирован и для более общего случая, например, для нелинейного осциллятора, или для осцилляторов с произвольными коэффициентами.

Литература

1. *Корольков, О. Г.* Синхронизация автоколебаний двух близких динамических систем / О. Г. Корольков, Г. Ю. Северин, В. В. Стрыгин // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 38–40.
2. *Корольков, О. Г.* Синхронизация двух слабо связанных автоколебательных систем с близкими частотами / О. Г. Корольков, В. В. Стрыгин // Вестник Воронежского университета. Серия Физика. Математика. – 2011. – № 1. – С. 175–180.
3. *Корольков, О. Г.* Взаимная синхронизация нескольких слабо связанных близких автоколебательных систем / О. Г. Корольков // Вестник Воронежского университета. Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 2. – С. 26–33.
4. *Корольков, О. Г.* Исследование внешней синхронизации осциллятора Ван дер Поля / О. Г. Корольков, Н. С. Ни // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов международной научной конференции. – Воронеж, 2019. – С. 84–90.
5. *Малкин, И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – Москва : Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1966. – 492 с.
6. *Красносельский, М. А.* Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. – Москва : Наука, 1970. – 352 с.

РЕШЕНИЕ СИГНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МАЙНАРДИ С ИМПУЛЬСОМ МАКСВЕЛЛА — ФЕЙЕРА

Т. И. Костина^{1,2}, М. Н. Силаева³, Алкади Хамса Мохамад³, М. Ю. Прицепов³

¹Воронежский государственный технический университет

²Воронежский государственный педагогический университет

³Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе исследуется задача, описывающая процесс замедленной диффузии (субдиффузии), математической модели которой является дифференциальное уравнение с дробной производной. Устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для рассматриваемого уравнения и показывается эффект замедления процесса в зависимости от порядка дробной производной.

Ключевые слова: субдиффузия, ядро Майнарди, операторная косинус-функция, C_0 -полугруппа, импульс Максвелла — Фейера.

1. Постановка задачи и формулировка результата

В [4], в связи с изучением процессов замедленной диффузии (субдиффузии) Ф. Майнарди рассматривает задачу нахождения решения уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.1)$$

при условии

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = g(x). \quad (1.2)$$

Здесь

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} ds \quad (1.3)$$

дробная производная порядка $0 < \alpha < 1$, в смысле Капуто, по переменной t , и приводится решение

$$u(x, t, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t, \alpha) g(x - \xi) d\xi,$$

где $G(x, t, \alpha)$ — ядро Майнарди, имеющее вид

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-|x|p^{\alpha/2}} p^{-\alpha/2} dp = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\mu^2 t^\alpha) \cos \mu x d\mu, \quad (1.4)$$

$$E_{\alpha, \alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} —$$

функция Миттаг — Леффлера.

В [6], задача (1.1)–(1.2), обобщается на случай уравнения

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t), \quad (1.5)$$

где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $U(t, A)$ линейных преобразований, действующих в банаховом пространстве, с условием

$$u(0) = u_0, \quad (1.6)$$

где $u_0 \in D(A)$ — область определения оператора A .

Доказывается корректная разрешимость задачи (1.5)–(1.6), в том смысле, что для любого $g \in D(A)$ существует единственная вектор-функция $u(t)$, со значениями в $D(A)$ для которой определена производная $\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}$, удовлетворяющая уравнению (1.5) и выполняется оценка

$$\|u(t)\| \leq M \|u_0\|. \quad (1.7)$$

В настоящей заметке приводится представление решения задачи (1.5)–(1.6), в случае, когда оператор A является производящим оператором косинус-функции $C(t, A)$ и доказывается

Теорема 1.1. Если в уравнении (1.5) оператор A является производящим оператором косинус-функции $C(t, A)$, действующей в банаховом пространстве, то решение задачи (1.5)–(1.6) существует, единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \int_{-\infty}^{\infty} G(s, t) C(s, A) u_0 ds = I_t^{1-\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(s, t) C(s, A) u_0 ds \right], \quad (1.8)$$

где $G(s, t)$ — ядро Майнардса (1.4), $I_t^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $(1-\alpha)$.

2. Необходимые понятия

Следующие понятия и факты можно найти в [1–5].

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$ и $U(t, A)$ — сильно непрерывная полугруппа линейных преобразований (C_0 -полугруппа) с производящим оператором (генератором) A .

Это означает, что справедливы следующие соотношения:

$$1) U(t, A)U(s, A) = U(t+s, A), \text{ для всех } t, s \geq 0 \quad (2.1)$$

$$2) U(0, A) = I \text{ — тождественный в } E \text{ оператор}$$

$$3) \lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t, A)\varphi - \varphi\| = 0 \text{ для всех } \varphi \in E$$

$$4) \text{ при некоторых } \mu > 0 \text{ и } \omega \in R \text{ выполняется оценка } \|U(t, A)\| \leq Me^{\omega t},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left\| \frac{U(t, A)\varphi - \varphi}{t} \right\| = U'(0, A)\varphi = A\varphi, \quad \varphi \in D(A). \quad (2.2)$$

Семейство непрерывных косинус функций (КОФ) в E определяется как семейство линейных ограниченных операторов $C(t, A)$ со следующими свойствами:

$$(i) C(t+s, A) + C(t-s, A) = 2C(t, A)C(s, A), \quad t \in R = (-\infty, \infty) \quad (2.3)$$

$$(ii) C(0, A) = I$$

$$(iii) \lim_{t \rightarrow 0} \|C(t, A)\varphi - \varphi\| = 0, \text{ при всех } \varphi \in E.$$

Для КОФ определён производящий оператор (генератор):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{C(2t, A) - I}{2t^2} \varphi \right] = C''(0)\varphi = A\varphi. \quad (2.4)$$

3. Примеры

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.2) для

$$g(x) = \cos mx$$

при условии

$$|u(x, t)| < \infty.$$

В этом случае оператор A задаётся дифференциальным выражением $Au = \frac{d^2 u}{dx^2}$ в пространстве равномерно непрерывных и ограниченных на $R = (-\infty, \infty)$ функций с нормой $\|g\| = \sup_{x \in R} |g(x)|$ и областью определения $D(A) = \left\{ g \in C_{[-\infty, \infty]}, \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \in C_{[-\infty, \infty]} \right\}$.

Этот оператор является генератором КОФ вида

$$C\left(t, \frac{d^2}{dx^2}\right)g(x) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)]. \quad (3.1)$$

И для $g(x) = \cos mx$ справедливо соотношение

$$C\left(t, \frac{d^2}{dx^2}\right)\cos mx = \frac{1}{2}[\cos m(x+t) + \cos m(x-t)] = \cos mt \cos mx. \quad (3.2)$$

Используя (3.2) в (1.8) получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt-sp^{\alpha/2}}}{p^{\alpha/2}} dp \cdot \cos ms ds \cdot \cos mx = \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{\alpha/2}} dp \int_0^\infty e^{-sp^{\alpha/2}} \cdot \cos ms ds \cdot \cos mx = \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{p^\alpha + m^2} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * t^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}(-m^2 t^\alpha) \cos mx = \\ &= \left[\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \sum_{n=0}^\infty \frac{(-m^2 t)^\alpha \Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \right] \cos mx = \cos mx + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-m^2)^\alpha}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} t^{-\alpha} * t^{n+\alpha-1} = \\ &= \cos mx + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-m^2)^\alpha \cdot \Gamma(n+\alpha) \cdot t^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha) n!} \cos mx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-m^2)^\alpha \Gamma(n+\alpha) t^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha) n!} \cos mx = K_m(t) \cos mx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Следствие 1. Если начальные условия задачи (1.1)–(1.2) представимы в виде тригонометрического ряда

$$g(x) = \sum_{m=0}^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

то её решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^\infty K_m(t, \alpha) (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \quad (3.4)$$

где

$$K_m(t, \alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n m^{2n} \Gamma(n+\alpha) t^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha) n!}.$$

Следствие 2. Если в качестве начальной функции взять импульс Максвелла — Фейера

$$g(x) = \sum_{m=1}^n (n-1-m) \cos mx, \quad (3.5)$$

изученные в [8], то получим решение задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^n (n+1-m) K_m(t) \cos mx. \quad (3.6)$$

Замечание 1. Если в задаче (1.1)–(1.2) $g(x) = \sin nx$, то приведённые рассуждения дают решение

$$u(t) = K_m(t) \sin mx. \quad (3.7)$$

Заметим, что

$$K_m(t, 1) = e^{-m^2 t}.$$

И, следовательно, в этом случае, решение (3.4) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m^2 t} (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Если задача (1.1)–(1.2) с условием (3.5), то решение имеет вид (3.6).

На основе формулы (3.6) написана программа в среде Maple, которая при выбранных значениях параметров и начальном условии производит визуализацию решения задачи (1.1)–(1.2). Так при $g(x)$ в виде импульса Максвелла — Фейера получен график решения, изображенный на рис. 1.

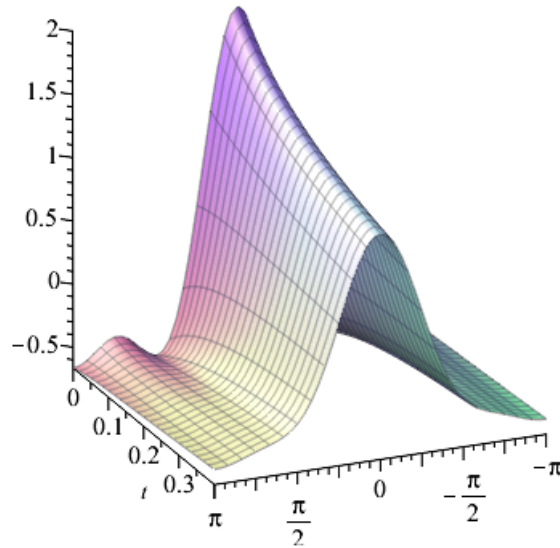


Рис. 1. Решение задач (1.1)–(1.2), при $\alpha = 0.5$, $g(x)$ — импульс Максвелла — Фейера при $n = 3$

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

Литература

1. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова. – Москва : Мир, 1967. – 624 с.
2. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1967. – 464 с.
3. Костин, В. А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // Доклады Академии Наук. – 2014. – Т. 455, № 2. – С. 142–146.
4. Майнард, Ф. Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции / Ф. Майнард // Радиофизика и квантовая электроника. – 1995. – Выпуск 38, № 1-2. – С. 20–36.
5. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

6. Костин, А. В. О корректной разрешимости задачи Коши для уравнения с дробной производной в банаховом пространстве / А. В. Костин, М. Н. Силаева, Алкади Хамса Мохаммад // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2. – С. 71–79.
7. Костин, А. В. К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2007. – 259 с.
8. Костин, В.А. Многочлены Максвелла — Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В. А. Костин, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов // Доклады Академии Наук. – 2012. – Т. 445, № 3. – С. 271–273.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЁННЫХ МЕР

И. Ф. Курбыко

Владимирский государственный университет

Аннотация. Построены два класса псевдодифференциальных операторов (ПДО), действующих в пространстве обобщённых мер на бесконечномерном гильбертовом пространстве. Получены достаточные условия разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений, содержащих в правой части ПДО с символами специального вида. Такие операторы представляют своего рода обобщение на бесконечномерный случай канонических псевдодифференциальных операторов. В частном случае, если символы зависят от одного аргумента, ПДО служат обобщением дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, эволюционные уравнения, обобщённые меры, свёртка мер, оператор Фурье, псевдодифференциальные операторы, символы ПДО.

Введение

Теория бесконечномерных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, а также связанных с ними эволюционных уравнений, превратилась в настоящее время в самостоятельную область нелинейного функционального анализа. Свойства таких операторов существенно, а иногда и принципиально отличаются от свойств конечномерных, а их исследование часто требует разработки новых методов (см. [1–4] и приведённую там литературу). Характерным отличием бесконечномерной теории интегрирования от её конечномерного аналога является отсутствие в бесконечномерном линейном топологическом пространстве E «меры Лебега», то есть ненулевой σ -конечной меры μ , дифференцируемой по подпространству $E_1 \subset E$, инвариантной относительно сдвигов такой, что $\mu(A + a) = \mu(A)$ для любого измеримого множества A и элемента $a \in E$. В этой связи в бесконечномерном пространстве изучаются параллельно два ряда объектов: обобщённые функции и обобщённые меры, при этом уравнения, сопряжённые к дифференциальным уравнениям относительно функций, оказываются уравнениями относительно мер. Вопросы разрешимости дифференциальных уравнений и уравнений с ПДО в локально выпуклых пространствах обобщённых объектов рассматривались в работах С. В. Фомина, О. Г. Смолянова, А. В. Углова, В. Ю. Бенткуса, А. Ю. Хренникова.

В настоящей работе получены условия разрешимости задачи Коши в обобщённых мерах для эволюционных уравнений, содержащих ПДО $P^*(x, D)$ и $P^*(D, y)$ с символами специального вида, зависящими от двух аргументов $(x, y) \in H \times H$, где H — бесконечномерное гильбертово пространство. Класс таких операторов является обобщением бесконечномерных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которые изучались В. Ю. Бенткусом и А. В. Угловым. Кроме того, операторы $P^*(x, D)$ и $P^*(D, y)$ являются бесконечномерными ПДО с pq -символом и qr -символом, соответственно, в смысле работы [1].

1. Обозначения и терминология

Всюду ниже через M обозначается векторное пространство финитных комплекснозначных мер m , определённых на σ -алгебре борелевских подмножеств гильбертова пространства H , бесконечно дифференцируемых по подпространству $H_1 \subset H$. Пространство M наделяется локально выпуклой топологией, задаваемой счётным набором полунорм [4, с. 7]: $\|m\|_0 = \text{var } m$, $\|m\|_n = \sup_{|h^n|_1 \leq 1} \text{var } d_{h^n} \mu(n=1, 2, \dots)$, $m \in M$. Оператор Фурье $F : m \rightarrow F[m]$, $F[m](y) = \int_H e^{i(x,y)} dm(x)$,

где (x, y) — скалярное произведение в H , переводит пространство мер M в пространство Z комплекснозначных функций $f: H \rightarrow C$. Через $F^{-1}: f \rightarrow F^{-1}[f]$, $f \in Z$ обозначается обратное преобразование Фурье. Топология в пространстве Z индуцируется из M отображением $F: M \rightarrow Z$. Пространство обобщённых мер представляет пространство Z' , сопряженное к Z ; пространство обобщённых функций есть пространство M' , сопряженное к M . Пространство основных мер естественно вкладывается в пространство обобщённых мер ($M \subset Z'$) так, что для $m \in M: \langle m, h \rangle = \int_H h(x) dm(x)$ для всех $h \in Z$. Сопряжённые пространства Z' и M' наделаются слабой топологией $\sigma = \sigma(Z', Z)$ и $\sigma = \sigma(M', M)$ [5], соответственно.

Ниже определяются классы функций, которым принадлежат символы ПДО. Через W^∞ обозначается векторное пространство функций $f: H \rightarrow C$, бесконечно дифференцируемых в смысле Фреше и ограниченных на ограниченных множествах в H вместе со всеми своими дифференциалами любого порядка. Через L_0 обозначается векторное пространство функций $p_0: H \times H \rightarrow C$ вида: $p_0(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{0j}(x)P_{0j}(y)$, удовлетворяющих условиям:

(а) $Q_{0j} = F[v_j]$, $v_j \in M$ для всех $j \in N$, причём $C_n = \sup_{j \in N} \|v_j\|_n < \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

(б) $P_{0j} \in W^\infty$ для всех $j \in N$ и для любого ограниченного множества $E \subset H$ существуют константы $c_p > 0$ и $\alpha_p > 1$ такие, что $\sup_{y \in E} |P_{0j}(y)| \leq c_p \alpha_p^{-j}$, $j \in N$;

(в) существует шар $B(0, l) \subset H$ конечного радиуса $l > 0$ такой, что для всех $j \in N$ носители $\text{supp } v_j \subset B(0, l)$. Через L_{01} обозначается подпространство пространства L_0 , состоящее из функций $p_1(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{1j}(x)P_{1j}(y)$, удовлетворяющих условию:

(г) для всякого ограниченного множества $E \subset H$ и всех $j, n \in N$ существуют константы $c_{p1} > 0$ и $\alpha_{p1} > 1$ такие, что $\sup_{y \in E, \|h^n\| \leq 1} |d_{h^n} P_{1j}(y)| \leq c_{p1} \alpha_{p1}^{-j}$.

Здесь $d_{h^n} P_{1j}(y)$ — дифференциал (порядка n) функции P_{1j} в точке y по направлениям $h_1, h_2, \dots, h_n$ из подпространства $H_1 \subset H$.

Определение 1. Псевдодифференциальными операторами в пространстве функций Z на бесконечномерном гильбертовом пространстве H с qr -символом $p_0 \in L_0$ и pq -символом $p_1 \in L_{01}$ называются отображения $P(x, D): Z \rightarrow Z$ и $P(D, y): Z \rightarrow Z$, определённые равенствами:

$$P(x, D)f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{0j}(x)F[P_{0j}(y)F^{-1}[f]](x); \quad P(D, y)f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} F[P_{1j}(y)F^{-1}[Q_{1j}f]](x) \quad (1)$$

для всех $f \in Z$ и $x \in H$.

Определение 2. Псевдодифференциальными операторами (ПДО) $P^*(x, D): Z' \rightarrow Z'$ и $P^*(D, y): Z' \rightarrow Z'$ в пространстве обобщённых мер Z' с символами $p_0 \in L_0$ и $p_1 \in L_{01}$ называются отображения, сопряжённые к операторам $P(x, D)$ и $P(D, y)$, соответственно.

Согласно определениям 1–2, для всех $\mu \in Z'$ и $f \in Z$ имеем:

$$\langle P^*(x, D)\mu, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mu, F[P_{0j}F^{-1}[Q_{0j}f]] \rangle; \quad \langle P^*(D, y)\mu, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mu, Q_{1j}F[P_{1j}F^{-1}[f]] \rangle.$$

Здесь $Q_{1j}F[P_{1j}F^{-1}[f]]$ есть произведение функций, равное преобразованию Фурье от свёртки мер: $F[v_{1j} * P_{1j}F^{-1}[f]] \in Z$, где $v_{1j} = F^{-1}[Q_{1j}]$. Автором доказано, что операторы $P(x, D)$ и $P(D, y)$ корректно определены равенствами (1) и являются изоморфизмами в пространстве основных функций Z .

2. Основная теорема и её доказательство

В работе [4] получено достаточное условие разрешимости задачи Коши для эволюционного уравнения $\{u'(t) = A^*u(t), u(t_0) = u_0\}$, где $A^*: X' \rightarrow X'$ — оператор, сопряжённый к линейному оператору $A: X \rightarrow X$ в локально выпуклом пространстве X ; предполагается, что сопряжённое пространство X' секвенциально полно в слабой топологии; $u: I \rightarrow X'$ — неизвестная функция; $t_0 \in R$, $0 < \Delta t < 1$; $I = (t_0 - \Delta t; t_0 + \Delta t)$ — интервал в R ; $u_0 \in X'$ — линейный непрерывный функционал на X . Теорема 1 из [4] утверждает, что если для каждого $h \in X$ существует действительное число $c_h > 0$ такое, что для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполняется неравенство: $|\langle u_0, A^{n+1}h \rangle| \leq c_h \cdot n!$, то существует решение $u = u(t)$ задачи Коши в пространстве X' . В настоящей работе на основании результатов из [4] доказана следующая теорема.

Теорема. Если для символов ПДО $p_0(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{0j}(x)P_{0j}(y)$ и $p_1(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{1j}(x)P_{1j}(y)$ существуют константы $\{\alpha_0 > 1, c_0 > 0, 0 \leq p_{0j} < p_0 < 1\}$ и $\{\alpha_1 > 1, c_1 > 0, 0 \leq p_{1j} < p_1 < 1\}$ такие, что для всех $y \in H$ и $j = 1, 2, \dots$

$$|P_{0j}(y)| \leq \frac{c_0 \|y\|^{p_{0j}}}{\alpha_0^j}; \quad |P_{1j}(y)| \leq \frac{c_1 \|y\|^{p_{1j}}}{\alpha_1^j}, \quad (2)$$

причём, постоянные $\{\alpha_0, c_0, \alpha_1, c_1\}$ не зависят от j , тогда существует решение $m: I \rightarrow Z'$ задачи Коши для эволюционных уравнений $m'(t) = P^*(x, D)m(t)$ и $m'(t) = P^*(D, y)m(t)$ с начальным условием $m(t_0) = v_0$, где $v_0 \in M$.

Доказательство. В силу свойств оператора Фурье $F: M \rightarrow Z$, переводящего меры в функции, пространство функций Z представимо в виде строго индуктивного предела последовательности счётно-нормированных пространств $Z_n = F[M_n]$, где $M_n \subset M$ есть подпространство пространства M , состоящее из мер с носителями в шаре радиуса n с топологией, задаваемой семейством норм $\|m\|_n$. Отсюда вытекает, что пространство Z' , как сопряжённое к Z , является секвенциально полным в слабой топологии. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при условии (2), $(n+1)$ -я итерация операторов $P(x, D)$ и $P(D, y)$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяет неравенству: $|\langle v_0, P^{n+1}\varphi \rangle| \leq c_\varphi \cdot n!$, где $\varphi \in Z$, $c_\varphi > 0$. Фиксируем функцию $\varphi \in Z$, построим следующие две последовательности мер: $m_0 = F^{-1}[\varphi]$, $m_n = F^{-1}[P^n(x, D)\varphi]$ и $\eta_0 = F^{-1}[\varphi]$, $\eta_n = F^{-1}[P^n(D, y)\varphi]$ ($n = 1, 2, \dots$). Пользуясь равенствами (1), получаем:

$$m_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} v_j * P_j m_n, \quad \eta_{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} P_j (v_j * \eta_n). \quad (3)$$

Пользуясь свойствами операций свёртки двух комплекснозначных мер $m_1 * m_2$ и произведения меры на функцию Pv , имеем: $\text{var}(m_1 * m_2) \leq 4 \text{var } m_1 \cdot \text{var } m_2$ и $\text{var } P_j v \leq \sup_{x \in B(0, r_j)} |P_j(x)| \cdot \text{var } v$

для всех $j \in N$ и меры $v \in M$, носитель которой расположен в шаре $B(0, r_j)$. Отсюда, на основании выражений (2)–(3), получаем следующие неравенства:

$$\text{var } m_{n+1} \leq 8c_0 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_0^{-j} \text{var } v_j \right) \cdot (b + nd)^{p_0} \cdot \text{var } m_n \leq \beta (b + nd)^{p_0} \cdot \text{var } m_n \leq \beta (b + nd)^{p_0} \cdot \text{var } m_n;$$

$$\text{var } \eta_{n+1} \leq 8 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in B(0, d+(n+1)r)} |P_j(x)| \cdot \text{var } v_j \right) \cdot \text{var } \eta_n \leq \beta' (b + nd + d)^{p_1} \cdot \text{var } \eta_n,$$

где постоянные $\beta = 8c_0 q_0 / (\alpha_0 - 1)$, $\beta' = 8c_1 q_0 / (\alpha_1 - 1)$ и $q_0 = \sup_{j \in N} \text{var } v_j$ не зависят от номера n . Далее имеем:

$$\text{var } m_{n+1} \leq \beta^{n+1} [(b + nd + d) \cdot (b + (n-1)d + d) \cdot \dots \cdot (b + d)]^{p_0} \text{var } m_0,$$

откуда следует оценка:

$$\text{var } m_{n+1} \leq \beta^{n+1} \cdot (n!)^{p_0} [((b+d)/n+d) \cdot ((b+d)/(n-1)+d) \cdot \dots \cdot (b+d)]^{p_0} \text{var } m_0 \leq C_0 B^n \cdot (n!)^{p_0},$$

где $C_0 = \beta \cdot \text{var } m_0 \cdot (b+d)^{p_0}$, $B = \beta \cdot (b+2d)^{p_0}$. Также получаем: $\text{var } \eta_{n+1} \leq C_1 B_1^n \cdot (n!)^{p_1}$, где $C_1 = \beta' \cdot \text{var } \eta_0 \cdot (b+d)^{p_1}$, $B_1 = \beta \cdot (b+2d)^{p_1}$. Подберём положительные числа C_B и C_{B_1} , независимые от n , так, чтобы имела место оценка степени: $B^n \leq C_B (n!)^k$ и $B_1^n \leq C_{B_1} (n!)^{k_1}$, где $k = (1-p_0) > 0$, $k_1 = (1-p_1) > 0$. Теперь, ясно, что в условиях теоремы существуют постоянные $Q_0 = C_0 \cdot C_B$ и $Q_1 = C_1 \cdot C_{B_1}$, зависящие только от $\varphi \in Z$, но независимые от n , такие, что $\text{var } m_{n+1} \leq Q_0 \cdot n!$ и $\text{var } \eta_{n+1} \leq Q_1 \cdot n!$. Рассматривая меру ν_0 , как линейный непрерывный функционал, определённый на пространстве основных функций Z , вычислим

$$\left| \langle \nu_0, P^{n+1}(x, D)\varphi \rangle \right| = \left| \int_H P^{n+1}(x, D)\varphi(y) d\nu_0(x) \right| = \left| \int_H F[m_{n+1}](y) d\nu_0(x) \right| \leq \int_H |F[m_{n+1}](y)| d\nu_0(x).$$

На основании определения интегрального оператора Фурье F , получаем оценку: $\left| \langle \nu_0, P^{n+1}(x, D)\varphi \rangle \right| \leq \text{var } m_{n+1} \cdot \text{var } \nu_0 \leq c_{\varphi 0} \cdot n!$, где $c_{\varphi 0} = Q_0 \cdot \text{var } \nu_0$. Аналогично имеем: $\left| \langle \nu_0, P^{n+1}(D, y)\varphi \rangle \right| \leq c_{\varphi 1} \cdot n!$, где $c_{\varphi 1} = Q_1 \cdot \text{var } \nu_0$. Теорема доказана.

Литература

1. Альбеверио, С. Квантование по Шрёдингеру систем Гамильтона-Дирака и интегралы Фейнмана по суперпространству / С. Альбеверио, О. Г. Смолянов // Доклады Академии наук. – 2003. – Т. 390, № 6. – С. 727–732.
2. Смолянов, О. Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шрёдингеру // ДАН СССР. – 1982. – Т. 263, Вып. 3. – С. 558–561.
3. Смолянов, О. Г. Гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова и бесконечномерные псевдодифференциальные операторы / О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 488, № 3. – С. 243–247.
4. Курбыко, И. Ф. Об условиях разрешимости задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений в локально выпуклых пространствах // Роль инноваций в трансформации современной науки. Сборник статей Международной научно-практической конференции (10 декабря 2018 г., г. Самара). – Уфа: АЭТЕРНА, 2018. – С. 5–8.
5. Kurbyko, I. On the Invertibility of Infinite-Dimensional Pseudodifferential Operators / I. Kurbyko, S. Levizov // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – V. 126, No 6. – P. 1607–1613.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ПЛОСКОМ МАТЕРИАЛЕ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Е. А. Логинова, О. Е. Мануковская

Воронежский государственный университет

Аннотация. Изучается нестационарное волновое уравнение, описывающее распространение колебаний в плоском неоднородном материале с трещиной по отрезку. Предполагается отсутствие воздействий внешних сил. Уравнение дополняется граничными условиями типа сопряжения и нулевыми начальными условиями на искомую функцию и её первую производную по времени. Исходная задача сводится к обобщенной. Строится её решение как свёртка правой части получившегося уравнения с фундаментальным решением. Выписывается решение исходной задачи, доказываются выполнение начальных и граничных условий.

Ключевые слова: волновое уравнение, плоскость с трещиной, неоднородный материал, материал с разрезом, условия типа сопряжения, разрез по отрезку, плоскость с конечным разрезом, начально-краевая задача, задача распространения колебаний, граничные условия, начальные условия.

Введение

В последние десятилетия актуальными являются исследования начально-краевых задач для композитных материалов с трещинами. Достаточно подробно были изучены задачи теплопроводности, упругости, теплоупругости [1, 2].

В настоящей работе представлена задача, описывающая распространение колебаний в плоском неоднородном материале с разрезом. Предполагается, что воздействие внешних сил отсутствует.

Рассматривается нестационарное однородное волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь искомая функция $u(x_1, x_2, t)$ — смещение материала, x_1, x_2 — пространственные переменные, t — время, $t \geq 0$. Уравнение (1) задано в плоскости с разрезом по отрезку $[-1; 1]$ оси абсцисс.

Цель исследования — найти решение уравнения (1), которое будет удовлетворять граничным условиям типа сопряжения:

$$u(x_1, +0, t) - u(x_1, -0, t) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x_1, +0, t)}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x_1, -0, t)}{\partial x_2} = q(x_1, t) \quad (3)$$

и начальным условиям

$$u(x_1, x_2, 0) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

При изучении задачи (1)–(5) используется функция $\delta_{(-1;1)}$. Выпишем её определение.

Определение 1. Специализированной дельта-функцией будем называть функцию $\delta_{(-1;1)}$. Данная функция принадлежит множеству обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^2)$ и для функции

$\lambda(x_1, t)$, непрерывной на отрезке $[-1; 1]$, и любой основной функции $\varphi(x_1, x_2, t) \in D(\mathbb{R}^3)$ выполнено равенство

$$(\lambda \delta_{(-1;1)}, \varphi(x_1, x_2, t)) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \lambda(x_1, t) (\delta(x_2), \varphi(x_1, x_2, t)) dx_1 dt.$$

Здесь $\delta(x_2)$ — дельта-функция Дирака.

Основной результат сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. Пусть функция $q(x_1, t)$ принадлежит множеству функций $C_{x,t}^{2,0}([-1; 1] \times [0; \infty))$. Пусть также $q(x_1, t)$ и её первые производные ограничены по совокупности переменных. Тогда при $t > 0$ решение задачи (1)–(5) представимо в виде

$$u(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1-1}^{x_1+1} \int_0^t \frac{q(x_1 - y_1, t - \sqrt{s^2 + y_1^2 + x_2^2})}{\sqrt{s^2 + y_1^2 + x_2^2}} ds dy_1. \quad (6)$$

При $x_1 \in (-1; 1)$ выполнены граничные условия (2) и (3). Также выполнены начальные условия (4) и (5).

Для доказательства теоремы 1 были сформулированы и доказаны следующие леммы.

1. Сведение исходной задачи к обобщенной

Лемма 1. Пусть существует $u(x_1, x_2, t)$ — решение задачи (1)–(5). Функция $q(x_1, t)$ принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^2)$ и ограничена при $t \in [0, T]$, где $T > 0$, а также равна нулю при $t < 0$. Пусть существует продолжение решения $u(x_1, x_2, t)$ на $t < 0$, то есть функция $u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} u(x_1, x_2, t), & \text{при } t \geq 0; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$ Тогда эта функция удовлетворяет обобщенной задаче

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right) = -q(x_1) \cdot \delta_{(-1;1)}.$$

Доказательство леммы 1 основано на применении функционалов Δu и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ к основной функции $\varphi(x_1, x_2, t)$ из $D(\mathbb{R}^3)$ в плоскости без квадрата $\Pi_\varepsilon = [-1 - \varepsilon^{1/2}; 1 + \varepsilon^{1/2}] \times [-\varepsilon; \varepsilon]$, окружающего трещину, и оценках получившихся выражений. При стремлении ε к нулю область изучения задачи сводится к исходной.

Таким образом, получаются равенства

$$(\Delta u, \varphi(x_1, x_2, t)) = (q(x_1, t) \delta_{[-1;1]}, \varphi) + (\{\Delta u\}, \varphi),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi(x_1, x_2, t) \right) = \left(\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}, \varphi(x_1, x_2, t) \right),$$

из которых следует утверждение леммы 1.

2. Построение решения

Лемма 2. Пусть функция $q(x_1, t) \delta_{(-1;1)}$ принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^3)$, функция $q(x_1, t)$ непрерывна при $t \geq 0$ и обращается в ноль при $t < 0$, а также ограничена в каждой полосе $0 \leq t \leq T$, где $T > 0$ — число; $E(x_1, x_2, t) \in S'(\mathbb{R}^3)$ — фундаментальное решение волнового оператора.

Тогда решение обобщенной задачи для задачи (1)–(5) представимо в виде

$$u(x_1, x_2, t) = E(x_1, x_2, t) * (-q(x_1, t) \delta_{(-1;1)}).$$

Доказательство леммы 2 сводится к применению теоремы о свёртке с финитным функционалом.

Лемма 3. Пусть функция $q(x_1, t)$ принадлежит множеству функций $C_{x,t}^{2,0}([-1; 1] \times [0; \infty))$, функции $q(x_1, t)$ и $\frac{\partial q(x_1, t)}{\partial t}$ ограничены по совокупности переменных. Тогда при $t > 0$ решение задачи (1)–(5) (поверхностный волновой потенциал простого слоя) представимо в виде (6).

Доказательство. Подействуем результатом свёртки $E(x_1, x_2, t) * (-q(x_1, t)\delta_{(-1;1)}(x_1, t))$, где $E(x, t) = \frac{\theta(t - |x|)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}$ — фундаментальное решение оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$, на основную функцию $\varphi(x_1, x_2, t)$. Используя определение и основные свойства свёртки ([3, 4]), а также определение 1, получим выражение

$$\begin{aligned} & (E(x_1, x_2, t) * (-q(x_1, t)\delta_{(-1;1)}(x_1, t)), \varphi(x_1, x_2, t)) = \\ & = (E(y, \tau)(-q(x_1, t)\delta_{(-1;1)}(x_1, t)), \eta(t)\eta(\tau)\eta(\tau^2 - |y|^2)\varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, t + \tau)) = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\tau - |y|)}{\sqrt{\tau^2 - |y|^2}} \eta(\tau)\eta(\tau^2 - |y|^2) \cdot \int_{\tau - 1 + y_1}^{\infty} q_1(\xi_1 - y_1, \sigma - \tau)\varphi(\xi_1, y_2, \sigma) d\xi_1 d\sigma dy_1 dy_2 d\tau, \end{aligned}$$

где θ — тэта-функция Хэвисайда, η — срезающие функции, $x_1 + y_1 = \xi_1$, $t + \tau = \sigma$.

Из последнего равенства с учетом свойств функции Хэвисайда, функций $q(x_1, t)$ и $\varphi(x_1, x_2, t)$, а также замены переменных получаем представление (6).

3. Доказательство выполнения граничных и начальных условий

Лемма 4. Пусть функция $q(x_1, t)$ принадлежит множеству функций $C_{x,t}^{2,0}([-1; 1] \times [0; \infty))$, функция $q(x_1, t)$ и её первые производные ограничены по совокупности переменных. Тогда при $x_1 \in (-1; 1)$ выполнены граничные условия (2) и (3). Также выполнены начальные условия (4)–(5).

Доказательство. Для доказательства выполнения условия (2) используем оценку

$$|u(x_1, x_2, t)| \leq \max |q| \left| \int_{x_1-1}^{x_1+1} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s^2 + y_1^2 + x_2^2}} ds dy_1 \right| \leq ct, \quad (7)$$

полученную путем последовательного вычисления интегралов по переменным s и y_1 .

Из неравенства (7) по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [3] можно сделать вывод о непрерывности оцениваемого интеграла по переменной x_2 и, следовательно, о выполнении граничного условия (2).

В ходе доказательства выполнения граничного условия (3) отдельно рассматриваются случаи $x_1 \notin [-1; 1]$ и $x_1 \in (-1; 1)$. В каждом из промежутков последовательно оцениваются при $x_2 \rightarrow 0$ интегралы, входящие в представление $\frac{\partial u}{\partial x_2}$. Показано, что при $x_1 \notin [-1; 1]$ выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} \text{ стремится к нулю при } x_2 \rightarrow \pm 0, \text{ при } x_1 \in (-1; 1) \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \rightarrow -\frac{q(x_1, t)}{2} \text{ при } x_2 \rightarrow -0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x_2} \rightarrow \frac{q(x_1, t)}{2}$$

при $x_2 \rightarrow +0$, откуда следует выполнение граничного условия (3).

Также, используя представление (6) и ограниченность $q(x_1, t)$, проведя вычисление интегралов в представлении функции $u(x_1, x_2, t)$ и последовательно их оценивая, получаем $\lim_{t \rightarrow 0} |u(x_1, x_2, t)| \leq 0$. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow 0} u(x_1, x_2, t) = 0$. Начальное условие (4) доказано.

Аналогично доказывается выполнение начального условия (5).

Из лемм (1)–(4) следует основной результат работы — теорема 1.

Заключение

Таким образом, была изучена нестационарная задача (1)–(5), описывающая распространение колебаний в плоскости с трещиной. задача была сведена к обобщенной, построено её решение. Затем выписано решение исходной задачи в интегральном виде, доказано выполнение граничных (2) и (3) и начальных (4)–(5) условий.

Литература

1. *Lei, W.-S.* Non oscillatory and non-singular asymptotic solutions to stress fields at interface cracks / W.- S. Lei // Willey Publishing Ltd. Fatigue Fract Engng Mater Struct. – 2017. – P. 1–18.
2. *Glushko, A. V.* Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity / A. V. Glushko, A. S. Ryabenko, V. E. Petrova, E. A. Loginova // Asymptotic Analysis. – 2016. – V. 98. – P. 285–307.
3. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – 4-е изд. перераб. и доп. – Москва : Наука, 1981. – 512 с.
4. *Глушко, А. В.* Уравнения математической физики / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – Воронеж : Изд-во Воронежский государственный университет, 2011. – 520 с.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О. Х. Масаева

*Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН*

Аннотация. В данной работе в прямоугольной области рассмотрена задача Дирихле для дифференциального уравнения второго порядка с частной производной дробного порядка. При целом значении порядка дробной производной получаем уравнение Лаврентьева — Бицадзе. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости.

Ключевые слова: задача Дирихле, дробная производная, обобщенное уравнение Лаврентьева — Бицадзе, уравнение с дробной производной по временной переменной.

Рассмотрим в области $D = \{(x, y) : 0 < x < r, a < y < b\}$, $a < 0$, $b > 0$, уравнение

$$Lu(x, y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} \right) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $1 < \alpha < 2$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \partial_{0y}^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования (в смысле Герасимова — Капуто) порядка α с началом в точке 0, по переменной y ; $\partial_{0s}^\alpha g(s) = D_{0s}^{\alpha-2} \frac{d^2}{ds^2} g(s)$, D_{0s}^α — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля порядка α с началом в точке 0 [1].

Линейные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка, не превосходящего двух исследовались в работах [2–5] и др. В указанных работах в основном изучались диффузионно-волновые уравнения. Более подробную библиографию можно найти в работах [2] и [4].

В работах [6] и [7] рассматривалась задача Дирихле в области D для уравнения, соответствующего уравнению Лаврентьева — Бицадзе, с другими типами дифференцирования.

Цель данной работы — это исследование задачи Дирихле для уравнения (1) в прямоугольной области.

Постановка задачи

Пусть $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$, $u_{xx}, \partial_{0y}^\alpha u \in C(D^- \cup D^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $D^- \cup D^+$.

Задача. Найти в области D регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad a < y < b, \quad (2)$$

$$u(x, a) = \varphi(x), \quad u(x, b) = \psi(x), \quad 0 < x < r, \quad (3)$$

$$\varphi(0) = \varphi(r) = 0, \quad \psi(0) = \psi(r) = 0,$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные непрерывные функции на отрезке $[0, r]$.

Литература

1. Нахушев, А. М. Дробное исчисление и его применение / А. М. Нахушев. – М. : Физматлит, 2003. – 272 с.

2. Псху, А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. – М. : Наука. – 2005. – 199 с.
3. Agrawal, O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain / O. P. Agrawal // Nonlinear Dynam. – 2002. – V. (29)-1, No 4. – P. 145–155.
4. Kilbas, A. A. Theory and applications of Fractional Differential Equations/ A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier, 2006. – 523 p.
5. Mainardi, F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi // Appl. Math. Lett. – 1996. – V. 9, No 6. – P. 23–28.
6. Masaeva, O. Kh. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev — Bitsadze equations with a fractional derivative/ O. Kh. Masaeva // Electron. J. Differential Eq. – 2017. – V. 2017, No 74. – P. 1–8.
7. Masaeva, O. Kh. Existence of solution to Dirichlet problem for generalized Lavrent'ev — Bitsadze equation with a fractional derivative/ O. Kh. Masaeva // Progress in Fractional Differentiation and Applications. – 2020. – V. 6, No 3. – P. 239–244.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БЕННИ — ЛЮКА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я. Т. Мегралиев¹, Б. К. Велиева²

¹Бакинский государственный университет

²Гянджинский государственный университет

Аннотация. Исследована одна обратная задача для линеаризованное уравнение Бенни — Люка с несамосопряженными краевыми условиями. Задача рассматривается в прямоугольной области. Дается определение классического решения поставленной задачи. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче (в определенном смысле), для которой доказывается теорема о существовании и единственности. Далее на основе этих фактов доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: линейная обратная краевая задача, уравнение Бенни — Люка, существование, единственность, классического решения.

Введение

Многие задачи математической физики, механики сплошных сред являются краевыми задачами, сводящимися к интегрированию дифференциального уравнения или системы уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]. Представляют большой интерес с точки зрения приложений дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например [2, 3]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Бенни — Люка имеют приложения в математической физике (см. [3]).

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки.

Линейными обратными коэффициентными задачами для дифференциальных уравнений с частными производными принято называть такие задачи, в которых неизвестными являются решение уравнения, а также тот или иной коэффициент, определяющий неизвестное внешнее воздействие (правую часть).

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А. Н. Тихонова [4], М. М. Лаврентьева [5, 6], В. К. Иванова [7] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А. М. Денисова [8].

Теория обратных краевых задач для уравнений четвертого порядка все еще остается малоизученной. Обратным краевым задачам для уравнения Бенни — Люка посвящены работы [9–12]

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений линейной обратной краевой задачи для уравнения Бенни — Люка с несамосопряженными краевыми условиями

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. В прямоугольнике D_T рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару $\{u(x, t), a(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$ удовлетворяющих уравнению [3]

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + \alpha u_{xxx}(x, t) - \beta u_{xxt}(x, t) = a(t)g(x, t) + f(x, t) \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

несамосопряженным граничным условиям

$$u(1, t) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad u_{xx}(1, t) = 0, u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

и с дополнительным условием

$$u(0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — фиксированные числа, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ — заданные функции.

Обозначим

$$\tilde{C}^{4,2}(D_T) = \{u(x, t) : u(x, t) \in C^2(D_T), u_{tt}(x, t), \\ u_{ttt}(x, t), u_{xxx}(x, t), u_{xxx}(x, t) \in C(D_T)\}.$$

Определение. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4) понимаем пару $\{u(x, t), a(t)\}$ функций $u(x, t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$, $a(t) \in C[0, T]$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2)–(4) в обычном смысле.

Аналогично [13], доказывается следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0, 1]$, $h(t) \in C^2[0, T]$, $f(x, t) \in C(D_T)$, $g(x, t) \in C(D_T)$, $g(0, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$), и выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0). \quad (5)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t) \in \tilde{C}^{4,2}(D_T)$ и $a(t) \in C[0, T]$ из соотношений (1)–(3) и условия

$$h''(t) - u_{xx}(0, t) + \alpha u_{xxx}(0, t) - \beta u_{xxt}(0, t) = a(t)g(0, t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (6)$$

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Известно [14], что последовательности функции

$$X_0(x) = 2(1-x), \quad X_{2k-1}(x) = 4(1-x)\cos\lambda_k x, \quad X_{2k}(x) = 4\sin\lambda_k x \quad (k=1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$Y_0(x) = 1, \quad Y_{2k-1}(x) = \cos\lambda_k x, \quad Y_{2k}(x) = x\sin\lambda_k x \quad (k=1, 2, \dots) \quad (8)$$

образуют биортогональную систему, и система (7) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ ($k=1, 2, \dots$).

Так как система (7) образует базис Рисса $L_2(0, 1)$ и система (7) и (8) образует биортогональную в $L_2(0, 1)$ систему функций, то первую компоненту $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (5) будем искать в виде

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}(x), \quad (9)$$

где

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x, t)Y_0(x)dx, \\ u_{2k-1}(t) = \int_0^1 u(x, t)Y_{2k-1}(x)dx, \quad u_{2k}(t) = \int_0^1 u(x, t)Y_{2k}(x)dx \quad (k=1, 2, \dots), \quad (10)$$

является решением следующей задачи:

$$u_0''(t) = F_0(t; a) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (11)$$

$$u_{2k-1}''(t) + \beta_k^2 u_{2k-1}(t) = \frac{1}{1 + \beta_k \lambda_k^2} F_{2k-1}(t; a) \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$u_{2k}''(t) + \beta_k^2 u_{2k}(t) = \frac{1}{1 + \beta_k \lambda_k^2} F_{2k}(t; a) + \\ + \frac{2\lambda_k(1 + 2\alpha\lambda_k^2)}{1 + \beta_k \lambda_k^2} u_{2k-1}(t) + \frac{2\beta_k \lambda_k}{1 + \beta_k \lambda_k^2} u_{2k-1}''(t) \quad (0 \leq t \leq T, k = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

причем

$$\beta_k^2 = \frac{\lambda_k^2(1 + \alpha\lambda_k^2)}{1 + \beta_k \lambda_k^2},$$

$$F_k(t; a) = a(t)g_k(t) + f_k(t), \quad g_k(t) = \int_0^1 g(x, t)Y_k(x)dx, \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t)Y_k(x)dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x)Y_k(x)dx, \quad \psi_k = \int_0^1 \psi(x)Y_k(x)dx \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Решая задачу (11)–(14) находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; a) d\tau, \quad (15)$$

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k-1} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta_k \lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau, \quad (16)$$

$$u_{2k}(t) = \varphi_{2k} \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta_k \lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k}(\tau; a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau + \\ + \frac{\lambda_k(1 + 2\alpha\lambda_k^2 + \alpha\beta_k \lambda_k^4)}{(1 + \beta_k \lambda_k^2)^3} \left[t \varphi_{2k-1} \sin \beta_k t + \left(\frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t - t \cos \beta_k t \right) \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta_k \lambda_k^2)} \int_0^t \left(\int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; a) \sin \beta_k(t - \xi) d\xi \right) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right] + \\ + \frac{2\beta_k \lambda_k}{\beta_k(1 + \beta_k \lambda_k^2)^2} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; a) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau. \quad (17)$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) в (9), для определения компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1)–(3), (5) получаем:

$$u(x, t) = \left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; a) d\tau \right) X_0(x) + \\ + \left\{ \varphi_{2k-1} \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k-1} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta_k \lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau \right\} X_{2k-1}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{2k} \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1 + \beta_k \lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k}(\tau; a) \sin \beta_k(t - \tau) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_k(1+2\alpha\lambda_k^2+\alpha\beta\lambda_k^4)}{(1+\beta\lambda_k^2)^3} \left[t\phi_{2k-1} \sin \beta_k t + \left(\frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t - t \cos \beta_k t \right) \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k-1} + \right. \\
& + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)} \int_0^t \left(\int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; a) \sin \beta_k(t-\xi) d\xi \right) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \Big] + \\
& \left. + \frac{2\beta\lambda_k}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)^2} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; a) \sin \lambda_k(t-\tau) d\tau \right\} X_{2k}(x). \quad (18)
\end{aligned}$$

Теперь, из (5), с учетом (9), имеем:

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h''(t) - f(0, t) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda_k^2 + \alpha\lambda_k^4)u_{2k-1}(t) + \beta\lambda_k^2 u_{2k-1}''(t)) \right\}. \quad (19)$$

Далее, из (12), с учетом (16), получаем:

$$\begin{aligned}
(\lambda_k^2 + \alpha\lambda_k^4)u_{2k-1}(t) + \beta\lambda_k^2 u_{2k-1}''(t) &= F_{2k-1}(t; a) - u_{2k-1}''(t) = \frac{\beta\lambda_k^2}{1+\beta\lambda_k^2} F_{2k-1}(t; a) - \beta^2 u_{2k-1}(t) = \\
&= \frac{\beta\lambda_k^2}{1+\beta\lambda_k^2} F_{2k-1}(t; a) - \beta^2 \left(\phi_{2k-1} \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k-1} \sin \beta_k t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; a) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \right). \quad (20)
\end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (6), подставим выражение (20) в (19):

$$\begin{aligned}
a(t) &= [h(t)]^{-1} \left\{ h''(t) - f(0, t) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\beta\lambda_k^2}{1+\beta\lambda_k^2} F_{2k-1}(t; a) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \beta^2 \left(\phi_{2k-1} \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} \psi_{2k-1} \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k(1+\beta\lambda_k^2)} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; a) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \right) \right] \right\}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (6) сведено к решению системы (18), (21) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Легко видеть, что $a(t)$ является решением уравнения (21) то пара $\{u(x, t), a(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$ будет решением задачи (1)–(3), (6).

1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $h(t) \in C^2[0, T]$.

2. $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi''(1) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\varphi^{(4)}(1) = 0$.

3. $\psi(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\psi(1) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi''(1) = 0$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$.

4. $f(x, t)$, $f_x(x, t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$, $f(1, t) = 0$, $f_x(0, t) = f_x(1, t)$ ($0 \leq t \leq T$).

5. $g(x, t)$, $g_x(x, t) \in C(D_T)$, $g_{xx}(x, t) \in L_2(D_T)$, $g(1, t) = 0$, $g_x(0, t) = g_x(1, t)$, $g(0, t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–5 и

$$B(T)(A(T) + 2)^2 < 1. \quad (22)$$

Тогда при малых значениях $T + \|g(0, t)\|_{C[0, T]}$ задача (1)–(3), (6) имеет единственное решение.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и выполнены условия согласования

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда при малых значениях $T + \|g(0, t)\|_{C[0, T]}$ задача (1)–(4) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

Литература

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. – М. : Наука, 2006. – 248 с.
2. Шабров С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 168–179.
3. Benney D. J., Luke J. C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. – 1964. – V. 43. – P. 309–313.
4. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. – 1943. – Т. 39, № 4. – С. 195–198.
5. Лаврентьев М. М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. – 1964. – Т. 157, № 3. – С. 520–521.
6. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М. : Наука, 1980. – 288 с.
7. Иванов В. К., Васин В. В., Танина В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
8. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М. : МГУ, 1994. – 206 с.
9. Юлдашев Т. К. Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегродифференциального уравнения Беннеу–Лука с вырожденным ядром // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – 2018. – Вып. 3. – С. 19–41.
10. Меграниев Я. Т., Велиева Б. К. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни — Люка с нелокальными условиями // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. – 2019. – Т. 29, выпуск 2. – С. 166–182.
11. Mehraliyev Yashar, Valiyeva Bahar. On one nonlocal inverse boundary problem for the Benney — Luke equation with integral conditions // Journal of Physics: Conference Series. – 2019/4. – V. 1203.
12. Mehraliyev Yashar T., K. Valiyeva Bahar & Ramazanov Aysel T. An inverse boundary value problem for a linearized Benny–Luc equation with nonlocal boundary conditions // Cogent Mathematics & Statistics. – 2019 – 6:1. – 1634316.
13. Меграниев Я. Т. Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2011. – № 5. – С. 51–56.
14. Калиев И. А., Сабитова М. М. Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. – 2009. – Т. 12, № 1(37). – С. 89–97.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ — КЛИФФОРДА В ЯДРЕ ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. В. Папкович, О. В. Скоромник

Полоцкий государственный университет

Аннотация. Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода с функцией Бесселя — Клиффорда в ядре по ограниченной пирамидальной области многомерного евклидова пространства специального вида. Следуя методике Я. Тамаркина, устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных интегральных уравнений первого рода.

Ключевые слова: интегральные преобразования, интегральные уравнения, функция Бесселя — Клиффорда, функция Бесселя первого рода, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

Введение

Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), функцию Бесселя, другие специальные функции изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, §§ 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана — Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a, b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48], [5] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, §§ 24.1, 28.4]).

Следуя методике Я. Тамаркина, в работах [7, 8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a, b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. В [9] получены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммиру-

емых функций. В [10–12] аналогичные результаты получены для отдельных классов многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Лежандра, вырожденной гипергеометрической функции Куммера, с функцией Бесселя — Клиффорда в ядрах по пирамидальным областям.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме еще одного многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя — Клиффорда в ядре по пирамидальной области и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решение рассматриваемого уравнения в квадратурах, а также устанавливаются необходимые и достаточные условия его разрешимости.

Предварительные сведения

Введем некоторые обозначения [1, §28.4]. Пусть $N = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, R^n — n -мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ и $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$ обозначим через $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ их скалярное произведение, в частности, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ для $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Пусть $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, x_2 > t_2, \dots, x_n > t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$, $R_+^n = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x} > 0\}$, а $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N_0^n = N_0 \times N_0 \times \dots \times N_0$, где $(k_i \in N_0, i = 1, 2, \dots, n)$ — мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! k_2! \dots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Для $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{k} \in N_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R_+^n$ и $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in R_+^n$ положим $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \mathbf{x}^\alpha}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_{\mathbf{k}} = (x_1)_{k_1} (x_2)_{k_2} \dots (x_n)_{k_n}$, $\mathbf{D}^\alpha = \frac{1}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2} \dots (\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma = (x_1^{\sigma_1} - t_1^{\sigma_1})(x_2^{\sigma_2} - t_2^{\sigma_2}) \dots (x_n^{\sigma_n} - t_n^{\sigma_n})$, где $(z)_n$ — символ Похгаммера: $(z)_0 \equiv 1$, $(z)_k = z(z+1) \dots (z+k-1) = \Gamma(z+n) / \Gamma(z)$ ($z \in C; n \in N$), $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R_+^n$.

Пусть $A = \|a_{jk}\|$ ($a_{jk} \in R^1$) — матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения общности положим $|A| = 1$. Пусть [1, §28.4]

$$A \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x}), (A \cdot \mathbf{x})^\alpha = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_1} (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x})^{\alpha_2} \dots (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$ и $r \in R^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c}, r}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in R^n : A \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) \geq 0, \mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r \geq 0\} \quad (1)$$

n -мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} + r = 0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{t}) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$). В частности, когда $A = E = \|\delta_{jk}\|$ — единичная матрица, $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, $E_{1,0}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b}) = \{\mathbf{t} \in R^n : \mathbf{t} \leq \mathbf{b}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{t} \geq 0\}. \quad (2)$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1} \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} > 0$ (соответственно $A^{-1} \mathbf{c} > 0$).

Для $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in R^n$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ введем функцию

$$\bar{J}_\nu[\mathbf{x}] = \prod_{j=1}^n \bar{J}_{\nu_j}[x_j], \quad (3)$$

представляющую собой произведение функций Бесселя — Клиффорда $\bar{J}_\mu(z)$, определяемых по формуле [1, §37.1]

$$\bar{J}_\mu(z) = \Gamma(\mu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu} J_\mu(z), \quad |z| < \infty; \quad (4)$$

где $J_\mu(z)$ — функция Бесселя первого рода [1, §1.3], [12, гл. 7]:

$$J_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\mu}}{\Gamma(\mu+k+1)k!}. \quad (5)$$

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b}), \quad (6)$$

где $A_{c,r}(\mathbf{b})$ ($\mathbf{c}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}^1$) — пирамида (1); $\mathbf{x}, \mathbf{t}, \alpha \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1, \lambda, \sigma \in \mathbb{R}_+^n$ и $\bar{J}_{\alpha-1} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right]$ — функция вида (3). Данное уравнение при $\sigma = 1$ обобщает соответствующее одномерное интегральное уравнение [1, §37.1].

Нам понадобятся второй интеграл Сонина для функции Бесселя (5) [13, 7.7(4)]:

$$\int_0^t \sqrt{\tau}^\mu (t-\tau)^\nu J_\mu(\alpha\sqrt{\tau}) J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau}) d\tau = 2\alpha^\mu \beta^\nu \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^{-(\nu+\mu+1)}} J_{\nu+\mu+1}(t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}(\mu) > -1, \operatorname{Re}(\nu) > -1;$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; §28] Если функция $f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau})$, определенная на $A_c(\mathbf{b}) \times A_c(\mathbf{b})$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:

$$\int_{A_c(\mathbf{b})} d\mathbf{t} \int_{A_c(\mathbf{t})} f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \int_{A_c(\mathbf{b})} d\boldsymbol{\tau} \int_{\sigma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau})} f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{t}, \quad (8)$$

$$\sigma(\mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \boldsymbol{\tau} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{b}\}, \quad (9)$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (8) сходится абсолютно.

Решение в замкнутой форме

Сначала дадим формальное решение уравнения (6). Заменяя в (6) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$(A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\sigma^1 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1} = t_1^{\sigma_1-1} t_2^{\sigma_2-1} \dots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{c,r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} \times \\ & \times \int_{A_{c,r}(\mathbf{t})} (A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} \right] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \\ & = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in A_{c,r}(\mathbf{b}). \end{aligned} \quad (10)$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (10) согласно формуле (8):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} (A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\alpha-1} \times \\ & \times \bar{J}_{\alpha-1} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)} \right] \bar{J}_{-\alpha} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \\ & = \int_{A_{c,r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{u} \leq A \cdot \mathbf{t} \leq A \cdot \mathbf{x}\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (11) вводим новые переменные

$$\mathbf{s}_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma), \quad \mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \quad (j=1, \dots, n).$$

Далее по формуле (4) выражаем функцию Бесселя — Клиффорда $\bar{J}_\mu[z]$ через функцию Бесселя $J_\mu[z]$, используем формулу (7), для внутреннего интеграла в правой части (11) получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{u})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} (A \cdot (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma))^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1} [A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}] \bar{J}_{-\alpha} [A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}] \times \\ & \times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \sqrt{\lambda}}{2\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\int_0^{\mathbf{a}_j \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}} \sqrt{\mathbf{s}_j^{-\alpha_j} (\mathbf{a}_j \cdot \lambda (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \mathbf{s}_j)^{\alpha_j-1}} \times \right. \\ & \left. \times J_{-\alpha} [\sqrt{\lambda} \sqrt{\mathbf{s}_j}] J_{\alpha_j-1} [\sqrt{\lambda} \sqrt{\mathbf{a}_j \cdot \lambda (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \mathbf{s}_j}] d\mathbf{s}_j \right] = \Gamma(1-\alpha) J_0(\sqrt{2\lambda} A \cdot \lambda (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)). \end{aligned}$$

На основании этого равенство (11) принимает вид:

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0(\sqrt{2\lambda} A \cdot \lambda (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}),$$

или

$$\int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0(\sqrt{2\lambda} A \cdot \lambda (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

где

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} [A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (13)$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right), \quad (14)$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (12) в виде

$$\int_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \quad (15)$$

где $E_1(\mathbf{y})$ — модельная пирамида (2),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f^* \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right), \quad \varphi(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha} \left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} \right) - \frac{r}{n\mathbf{c}} \right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (15) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1+\dots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+\dots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \dots \int_{-(\tau_2+\dots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \quad (16)$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \varphi(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\mathbf{c}}$, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k=1, \dots, n), \quad (17)$$

где $\tilde{a}_{jk}$ ($j, k=1, \dots, n$) — элементы обратной матрицы A^{-1} , и $J_0(A \cdot \lambda (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)) = J_0(0) = 1$, приходим к следующей формуле решения уравнения (6):

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} [A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}. \quad (18)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (6) разрешимо, то его решение имеет вид (18).

Необходимые и достаточные условия разрешимости

Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (6) в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$:

$$L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\}. \quad (19)$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}), A \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq A \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})) \right\}. \quad (20)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (6), что и пространство $AC([a,b])$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, §2.2]. Отметим, что если $\varphi \in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \varphi(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}).$$

В частности, если $A = E$ — единичная матрица, $\mathbf{c} = \mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и $r = 0$, (19)–(20) принимают вид соответственно

$$L_1(E_1(\mathbf{b})) = \left\{ f(\mathbf{x}) : \int_{E_1(\mathbf{x})} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} < \infty \right\},$$

$$I_{E_1}(L_1) = \left\{ \varphi : \varphi(\mathbf{x}) = \int_{E_1(\mathbf{x}), (\mathbf{b}-\mathbf{t}) \geq (\mathbf{x}-\mathbf{t})} h(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, h(\mathbf{t}) \in L_1(E_1(\mathbf{b})) \right\},$$

$$\text{где } h(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(\mathbf{x}).$$

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

Теорема 1. Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (6) с $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) и $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}_+^n$ в пространстве $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} (A \cdot (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma))^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} [A \cdot \lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1) \quad (21)$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = \dots = \left[\prod_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \left(\tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + r = 0} = 0. \quad (22)$$

При выполнении этих условий уравнение (6) разрешимо в $L_1(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой (18).

Доказательство.

В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}) = E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно получается из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (17).

Следствие 1. Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1} \left[\lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in E_1(\mathbf{b}), \quad (23)$$

с $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ($0 < \alpha < 1$) и $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}_+^n$ разрешимо в пространстве $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ тогда и только тогда, когда

$$f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[\lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \in I_{E_1}(L_1)$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1, \mathbf{x}=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1, \mathbf{x}=0} = \dots = \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) \right]_{1, \mathbf{x}=0} = 0.$$

При выполнении этих условий уравнение (23) разрешимо в $L_1(E_1(\mathbf{b}))$ и его единственное решение дается формулой

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_{E_1}^{\lambda, \alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(\mathbf{x})} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha} \left[\lambda \sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)} \right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right\}.$$

Заключение

В работе проведено исследование многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя – Клиффорда по ограниченной пирамидальной области. Получено его решение в замкнутой форме, установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в пространстве суммируемых функций.

Литература

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Репин, О. А. Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О. А. Репин. – Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.
3. Kilbas, A. A. On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation / A. A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – V. 25, № 1. – P. 1–9.
4. Михлин, С. Г. Лекции по интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1959. – 232 с.
5. Преображенский, Н. Г. Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н. Г. Преображенский. – Новосибирск : Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.
6. Федосов, В. П. О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.
7. Килбас, А. А. Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А. А. Килбас, Р. К. Райна, М. Сайго, Г. М. Сривастава // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.
8. Raina, K. L. Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K. L. Raina, T. M. Srivastava, A. A. Kilbas, M. Saigo // ANZIAM J. – 2001. – V. 43, № 2. – P. 291–320.
9. Килбас, А. А. Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А. А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.

10. Килбас, А. А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Доклады академии наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.
11. Скоромник, О. В. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2014. – № 1. – С. 12–17.
12. Скоромник, О. В. Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 2(99). – С. 5–13.
13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ПЕРЕХОДА ОТ МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ К МОДЕЛИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. В. Половинкина¹, И. П. Половинкин²

¹Воронежский государственный университет инженерных технологий

²Воронежский государственный университет

Аннотация. Показано, что добавление диффузионных членов к обыкновенным дифференциальным уравнениям, например к логистическим, может ослабить достаточные условия устойчивости стационарного решения.

Ключевые слова: диффузионная модель, стационарное решение, устойчивость, неравенство Стеклова — Пуанкаре — Фридрихса.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \mathcal{G}_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\left(\mu_s u_s + \eta_s \frac{\partial u_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial \Omega} = B_s(x), \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \geq 0, \quad \eta_s \geq 0, \quad (2)$$

$$u_s(x, 0) = u_s^0(x), \quad s = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial \Omega$, ν — единичный вектор нормали к границе $\partial \Omega$ области Ω , $u = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$, $\mathcal{G}_s \geq 0$, $B_s(x) \in C(\partial \Omega)$, $u_s^0(x) \in C(\bar{\Omega})$, $s = 1, \dots, m$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$, Δ — оператор Лапласа, определенный формулой

$$\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Рассмотрим специальный вид функций $F_s(u) = F_s(u_1, \dots, u_m)$:

$$F_s(u) = \sum_{k=1}^m b_{sk} u_k + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} u_\ell u_j + f_s(x), \quad f_s \in C(\bar{\Omega}), \quad a_{s\ell j} = a_{sj\ell}, \quad \ell, j, s = 1, \dots, m, \quad (4)$$

Пусть $w = (w_1(x), \dots, w_m(x))$ — стационарное решение системы (1), то есть решение системы

$$\mathcal{G}_s \Delta w_s + F_s(w) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left(\mu_s w_s + \eta_s \frac{\partial w_s}{\partial \nu} \right) \Big|_{x \in \partial \Omega} = B_s(x), \quad s = 1, \dots, m. \quad (6)$$

В настоящей работе мы интересуемся устойчивостью стационарного решения системы (1). Пусть $z = z(x, t) = u(x, t) - w(x)$ — вектор отклонений от стационарного решения. Подставим в систему (1) представление $u = w + z$. Тогда

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} = \mathcal{G}_s \Delta (w_s + z_s) + F_s(w + z), \quad s = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega.$$

После тождественных преобразований получим равенство

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} = \mathcal{G}_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} (2w_\ell z_j + z_\ell z_j) + \mathcal{G}_s \Delta w_s + F_s(w), \quad s = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega.$$

С учетом равенства (5) последнее равенство преобразуется к виду

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \frac{\partial z_s}{\partial t} = \mathcal{G}_s \Delta z_s + \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} (2w_\ell z_j + z_\ell z_j) \quad s = 1, \dots, m, \quad x \in \Omega.$$

Умножим это равенство на z_s и проинтегрируем по области Ω . Получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = \mathcal{G}_s \int_{\Omega} z_s \Delta z_s dx + \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} b_{sk} z_k z_s dx + \int_{\Omega} \left(2 \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} w_{\ell} z_j z_s + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} z_{\ell} z_j z_s \right) dx.$$

Считая отклонения z_s достаточно малыми, отбросим одночлены от этих отклонений степени выше второй, после чего получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = \mathcal{G}_s \int_{\Omega} z_s \Delta z_s dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^m b_{sk} z_k z_s + 2 \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} w_{\ell} z_j z_s \right) dx.$$

Применим к первому слагаемому в правой части этого равенства первую формулу Грина для оператора Лапласа. Получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} z_s^2 dx = -\mathcal{G}_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \mathcal{G}_s \int_{\partial\Omega} g(z_s) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^m b_{sk} z_k z_s + 2 \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} w_{\ell} z_j z_s \right) dx, \quad s = 1, \dots, m, \quad (7)$$

где второе слагаемое в правой части равенства представляет собой поверхностный (при $n \geq 3$) или криволинейный (при $n = 2$) интеграл первого рода по границе области Ω , а в случае $n = 1$ сумму неотрицательных значений на концах интервала Ω ; $g(z_s) = 0$ при $\mu_s = 0$ или при $\eta_s = 0$; если же $\eta_s \neq 0$, то $g(z_s) = \mu_s z_s^2 / \eta_s$. В любом случае $g(z_s) \geq 0$. Сложив m равенств (7), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx = -\sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\partial\Omega} g(z_s) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m b_{sk} z_k z_s + 2 \sum_{s=1}^m \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n a_{s\ell j} w_{\ell} z_j z_s \right) dx,$$

или, что то же,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx = -\sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\partial\Omega} g(z_s) d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \beta_{sk} z_k z_s dx, \quad (8)$$

где

$$\beta_{sk} = b_{sk} + 2 \sum_{\ell=1}^m a_{s\ell k} w_{\ell}. \quad (9)$$

Положим

$$\Theta_{sk} = (\beta_{sk} + \beta_{ks}) / 2. \quad (10)$$

Тогда равенство (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx = -\sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx - \sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\partial\Omega} g(z_s) d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx. \quad (11)$$

В преобразовании (10) нет особой надобности. Единственная цель его применения — это переход от несимметричной квадратичной формы к симметричной. Совершенно ясно, что отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx \quad (12)$$

обеспечит отрицательность левой части равенства (11), а значит, устойчивость стационарного решения.

При отсутствии диффузионных членов, то есть при

$$\mathcal{G}_s = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (13)$$

переменные $x_1, \dots, x_n$ входят в уравнения (1) как параметры, производные по которым не содержатся в этих уравнениях. Это случай модели с сосредоточенными параметрами. Пусть теперь

$$\sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s^2 > 0, \quad (14)$$

то есть мы переходим к рассмотрению диффузионной модели с распределенными параметрами. В этом случае можно ослабить достаточное условие устойчивости стационарного реше-

ния. Для этого воспользуемся неравенством Стеклова — Пуанкаре — Фридрихса (см. [1], с. 56, [2] с. 150, [3] с. 62)

$$\int_{\Omega} |\nabla z_s|^2 dx \geq \frac{1}{d^2} \int_{\Omega} z_s^2 dx,$$

где $d = \text{diam } \Omega$ — диаметр области Ω . Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |z|^2 dx \leq - \sum_{s=1}^m \frac{\mathcal{G}_s}{d^2} \int_{\Omega} z_s^2 dx - \sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s \int_{\partial\Omega} g(z_s) d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_{sk} z_k z_s dx. \quad (15)$$

Теперь можно утверждать, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m A_{sk} z_k z_s, \quad (16)$$

где

$$A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks} \mathcal{G}_s / d^2.$$

Чтобы наглядно продемонстрировать, как меняются свойства модели при введении распределенных параметров посредством добавления диффузионных членов, рассмотрим случай

$$b_{sk} = 0, \quad f(x) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad s, k = 1, \dots, m.$$

В этом случае вектор $w = 0$ является стационарным решением системы как в случае сосредоточенных параметров (13), так и в случае распределенных параметров (14). Однако ситуации принципиально разнятся. В бездиффузионном случае нулевой вектор не является устойчивым решением. Если же все уравнения системы содержат диффузионные члены, то есть при

$$\mathcal{G}_s > 0, \quad s = 1, \dots, m,$$

квадратичная форма (16) примет вид

$$-\frac{1}{d^2} \sum_{s=1}^m \mathcal{G}_s z_s^2 \quad (17)$$

и, очевидно, будет отрицательно определенной, что означает устойчивость нулевого решения.

Другой интересный пример дает уравнение Хотеллинга

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p,$$

где p — искомая функция, $p = p(x, y, t) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ при каждом $t > 0$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа, A, B, ξ суть заданные положительные постоянные. Это уравнение описывает рост и распространение популяции. При этом входящие в уравнение величины имеют следующий смысл: A — темп роста популяции, B — темп распространения, ξ — коэффициент насыщенной плотности, p — плотность популяции, t — время.

Пусть $w(x, y)$ — стационарное решение уравнения Хотеллинга, то есть решение уравнения

$$A(\xi - w)w + B\Delta w = 0.$$

Изложенный выше метод приводит к заключению о том, что условие

$$w > \frac{\xi}{2} - \frac{B}{2Ad^2}$$

является достаточным для устойчивости стационарного решения $w(x, y)$ (см. [4]). На сей раз интересно отметить, что в диффузионном случае (при $B \neq 0$) нулевое стационарное решение может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым, что определяется размером области Ω .

Литература

1. *Михлин, С. Г.* Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – Москва : Высшая школа, 1977. – 431 с.
2. *Михайлов, В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – Москва : Наука, 1976. – 392 с.
3. *Ладыженская, О. А.* Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – Москва : Наука, 1973. – 408 с.
4. *Мешков, В. З.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга / В. З. Мешков, И. П. Половинкин, М. Е. Семенов // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2002. – Т. 9, вып. 1. – С. 226–227.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

В. В. Провоторов¹, А. П. Жабко²

¹Воронежский государственный университет

²Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается дифференциально-разностный аналог начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с распределенными параметрами на графе в классе суммируемых функций. Используется метод Е. Ротэ, основанный на полу-дискретизации по временной переменной начально-краевой задачи, позволяющий установить не только существование слабого решения начально-краевой задачи, но и свести изучение устойчивости дифференциально-разностной системы к анализу устойчивости слабого решения этой задачи. Полученные результаты применимы при моделировании сетеподобных процессов переноса формализмами дифференциально-разностных систем с распределенными параметрами на графе и открывают подход к анализу задач оптимального управления такими системами, включая задачи управления многомерными математическими моделями.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, геометрический граф, устойчивость.

Анализ дифференциально-разностной системы осуществляется в классе суммируемых функций, базируется на построении априорных оценок слабых решений дифференциально-разностного уравнения и установлении слабой компактности последовательности этих решений (см., например, работы [1–3]). Показана сепарабельность пространства слабых решений, при построении приближений решений используется специальный базис — множество обобщенных собственных функций эллиптического оператора задачи. Установлены условия, гарантирующие устойчивость решения дифференциально-разностной системы.

1. Обозначения, используемые понятия и утверждения

На протяжении всего текста используются понятия и обозначения, принятые в [1, 2]: Γ — ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ , параметризованными отрезком $[0, 1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ — множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 — объединение всех ребер γ_0 , не содержащих концевых точек; $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$, $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0, t)$, $t \leq T < \infty$ — произвольная фиксированная постоянная. На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по Γ или Γ_T .

Необходимые пространства и множества: $L_p(\Gamma)$ ($p = 1, 2$) — банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p -й степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой, определяемой соотношением $\|u\|_{2,1,\Gamma_T} = \int_0^T \left(\int_{\Gamma} u^2(x, t) dx \right)^{1/2} dt$; $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную первого порядка по x , принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$; аналогично вводится пространство $W_2^1(\Gamma_T)$; $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)} \quad (1)$$

и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$.

Ниже рассматривается дифференциально-разностный аналог параболического уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t) = f(x, t), \quad x, t \in \Gamma_T, \quad (2)$$

где $a(x)$, $b(x)$ — фиксированные измеримые и ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом:

$$0 < a_* \leq a(x) \leq a^*, \quad |b(x)| \leq \beta, \quad x \in \Gamma_0, \quad (3)$$

условия на функцию $f(x, t)$ будут представлены ниже. Уравнение (2) представляет собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ .

Введем пространство состояний системы (2) и вспомогательные пространства. Для этого в $W_2^1(\Gamma)$ рассмотрим билинейную форму $\ell(\mu, \nu) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x) \right) dx$.

Имеет место следующее утверждение [3, с. 92].

Лемма. Пусть функция $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ такова, что $\ell(u, \nu) - \int_{\Gamma} f(x)\eta(x)dx = 0$ для любой $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x) \in L_2(\Gamma)$ — фиксированная функция). Тогда для любого ребра $\gamma \subset \Gamma$ сужение $a(x)_\gamma \frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках ребра γ .

Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям леммы 1 и соотношениям $\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$ во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер γ , соответственно ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », $f(\cdot)_\gamma$ — сужение функции $f(\cdot)$ на ребро γ). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a, \Gamma)$. При этом, если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a, \Gamma)$.

Далее, обозначим через $\Omega_a(\Gamma_T)$ множество функций $u(x, t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) как функции класса $W_0^1(a, \Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1, t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0, t)_\gamma}{\partial x} \quad (4)$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$; ясно, что $V^{1,0}(a, \Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (4) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0, T]$ (аналогично вводится пространство $W^1(a, \Gamma_T)$); $W^{1,0}(a, \Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$. Пространство $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ описывает множество состояний параболической системы, $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и $W^1(a, \Gamma_T)$ — вспомогательные пространства. Отличием элементов пространства $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ от элементов $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ является отсутствие у последних непрерывности по временной переменной t .

В пространствах $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ рассмотрим параболическую систему (2), состоящие которой $u(x, t)$ ($x, t \in \bar{\Gamma}_T$) определяется слабым решением $u(x, t)$ уравнения (2) в области Γ_T , удовлетворяющим начальному и краевому условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \in L_2(\Gamma), \quad u|_{x \in \partial\Gamma_T} = 0. \quad (5)$$

Приведем основные утверждения в пространстве $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$, затем — в $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$, доказательства этих утверждений приведены в работе [4].

Пусть выполнены условия (3) и $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Введем билинейную форму $\ell_i(u, \eta) = \int_{\Gamma_i} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) u(x, t) \eta(x, t) \right) dx dt$ ($0 \leq t \leq T$) и определим решение задачи (2), (5) в пространствах $W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$ и $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Определение 1. Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (2), (5) называется функция $u(x, t) \in W_0^{1,0}(a, \Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$-\int_{\Gamma_T} u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_T(u, \eta) = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt$$

для любой функции $\eta(x, t) \in W^1(a, \Gamma_T)$, равной нулю при $t = T$.

Определение 2. Слабым решением класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ начально-краевой задачи (2), (5) называется функция $u(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Gamma} u(x, t) \eta(x, t) dx - \int_{\Gamma_i} u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_i(u, \eta) = \int_{\Gamma} \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_i} f(x, t) \eta(x, t) dx dt \quad (6)$$

при любом $t \in [0, T]$ и для любой функции $\eta(x, t) \in W^1(a, \Gamma_T)$.

В работе [4] при тех же условиях, что и выше, рассматривалась начально-краевая задача вида (2), (5) при анализе устойчивости слабого решения уравнения (2) в области $\Gamma_{\infty} = \Gamma_0 \times (0, \infty)$, где были установлены условия, гарантирующие однозначную слабую разрешимость задачи (2), (5) в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ при любом $T < \infty$, используя метод Фаздо — Галеркина со специальным базисом — множеством обобщенных собственных функций класса $W_0^1(a, \Gamma)$ одномерного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением $\Lambda u = -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x) u(x)$ [5]. А именно, при условиях (3) рассматривалась спектральная задача $\Lambda \phi = \lambda \phi$, $\phi|_{\partial \Gamma} = 0$, в классе $W_0^1(a, \Gamma)$ — задача определения множества чисел λ , каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $\phi(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$, удовлетворяющее тождеству $\ell(\phi, \nu) = \lambda(\phi, \nu)$ при любой функции $\nu(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$. Для этой задачи установлены следующие свойства.

1. Собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$; соответственно нумеруются и обобщенные собственные функции: $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$.

2. Собственные значения λ_i положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых; если $b(x) \geq 0$, тогда собственные значения положительные.

3. Система обобщенных собственных функций $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$ образует ортогональный базис в пространстве $W^1(a, \Gamma)$ и пространстве $L_2(\Gamma)$ (везде ниже $\|\phi_i\|_{L_2(\Gamma)} = 1$).

Теорема 1. При любых $f(x) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ и для любого $0 < T < \infty$ начально-краевая задача (2), (5) слабо разрешима в пространстве $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

При доказательстве теоремы строятся приближения Фаздо — Галеркина по спектральному базису $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 1}$: приближенные решения $u^N(x, t)$ (натуральное N фиксировано) задачи (2), (5) имеют вид $u^N(x, t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t) \phi_i(x)$, где $c_i^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $[0, T]$ функции ($c_i'(t) \in L_2(0, T)$), определяемые из следующей системы ($i = \overline{1, N}$):

$$\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}, \phi_i \right) + \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{\partial u^N(x, t)}{\partial x} \frac{d\phi_i(x)}{dx} + b(x) u^N(x, t) \phi_i(x) \right) dx = (f, \phi_i), c_i^N(0) = (\varphi, \phi_i).$$

Дальнейшие рассуждения основаны на априорных оценках норм слабых решений задачи (2), (5) и построении слабо сходящейся по норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ подпоследовательности $\{y^{N_k}\}_{k \geq 1}$ последовательности $\{u^N\}_{N \geq 1}$ к решению $u(x, t) \in W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ (слабая компактность $\{u^{N_k}\}_{k \geq 1}$).

Преследуя цель простоты изложения, несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$, заменив его на $CL_{2,1}(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($CL_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_{2,1}(\Gamma_T)$, непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$) и считая $f(x, t) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$ (последнее является необременительным условием в приложениях). Иными словами функции $f(x, t)$, суммируемые по переменной $t \in (0, T)$ в норме $L_2(\Gamma)$ заменяются функциями, непрерывными по переменной $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Gamma)$.

Теорема 2. При любых $f(x) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ и для любого $0 < T < \infty$ начально-краевая задача (2), (5) слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

При доказательстве устанавливается, что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ след принадлежащего пространству $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ слабого решения задачи (2), (5) (теорема 1) суть элемент $W_0^1(a, \Gamma)$ и непрерывно зависит от t в норме $W_2^1(\Gamma)$ (а значит, и в норме $L_2(\Gamma)$). Слабое решение задачи (2), (5) представимо в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varphi_i e^{-\lambda_i t} + \int_0^t f_i(\tau) e^{-\lambda_i(t-\tau)} d\tau \right) u_i(x), \quad (7)$$

учитывая разложения $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \phi_i(x)$, $\varphi_i = \int_{\Gamma} \varphi(x) \phi_i(x) dx$ и $f(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) \phi_i(x)$, $f_i(t) = \int_{\Gamma} f(x, t) \phi_i(x) dx$, $t \in [0, T]$. Стандартным образом устанавливается и следующее утверждение.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 2 начально-краевая задача (2), (5) имеет единственное слабое решение в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ для любого $0 < T < \infty$.

2. Устойчивость дифференциальной системы (2)

В многочисленных приложениях, где необходимо исследовать свойства решений $u(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ задачи (2), (5) для произвольного конечного T , важно знать поведение $u(x, t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Пусть, как и выше, $f(x, t) \in CL_{2,1}(\Gamma_T)$, причем

$$\int_t^{t+1} \|f(\cdot, \varsigma)\|_{L_2(\Gamma)}^2 d\varsigma \leq A \quad (8)$$

для любого $t \geq 0$ (A — фиксированная постоянная); последнее означает, что функция $f(x, t)$ определена в области $\Gamma_{\infty} = \Gamma_0 \times [0, \infty)$ [4].

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и условие (8) для функции $f(x, t)$, тогда для слабого решения $u(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{\infty})$ задачи (2), (5) существует такая положительная постоянная C , что

$$a) \int_t^{t+1} \|u(\cdot, \varsigma)\|_{W_2^1(\Gamma)}^2 d\varsigma \leq C \text{ для любых } t \geq 0, \text{ б) } \|u(\cdot, t)\|_{L_2(\Gamma)} \leq C \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

В дальнейшем исследовании предполагается выполнение условия $0 \leq b(x) \leq \beta < \infty$, $x \in \Gamma$, гарантирующее положительность собственных значений λ_i , $i \geq 1$, и условия теоремы 4. Пусть состояние системы (2) описывается функцией $\bar{u}(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{\infty})$, являющейся слабым решением уравнения (2) в области Γ_{∞} с начальным $u|_{t=t_0} = \bar{\varphi}(x)$, $x \in \Gamma$, и краевым $u|_{x \in \partial \Gamma_{\infty}} = 0$ условиями (здесь $\partial \Gamma_{\infty} = \partial \Gamma_0 \times (0, \infty)$), а функция $u(x, t) \in V^{1,0}(a, \Gamma_{\infty})$ — слабое решение уравнения (2) в области Γ_{∞} с начальным $u|_{t=t_0} = \varphi(x)$, $x \in \Gamma$, и краевым $u|_{x \in \partial \Gamma_{\infty}} = 0$ условиями. Состояние $\bar{u}(x, t)$ системы (2) назовем невозмущенным, а $u(x, t)$ — возмущенным.

Определение 3. Невозмущенное состояние $\bar{u}(x, t)$ системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любых $t_0 > 0$ и $\epsilon > 0$ существует $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ такое, что при $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)} < \delta(t_0, \epsilon)$ выполняется $\|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{W^1(a, \Gamma)} < \epsilon$ при $t \geq t_0$, где $u(x, t)$ — возмущенное состояние системы (4).

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и условие $0 \leq b(x) \leq \beta < \infty$, $x \in \Gamma$, тогда невозмущенное состояние системы (2) в области Γ_∞ устойчиво по Ляпунову.

3. Дифференциально-разностная параболическая система

Используя метод Ротэ полу-дискретизации по переменной t [6, с. 189], осуществим редукцию задачи (2), (5) к более простой дифференциально-разностной параболической системе, допускающей достаточно простое алгоритмическое оформление и эффективную реализацию на современной вычислительной технике. При этом доказывается теорема существования слабого решения задачи (2), (5) в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ для любого $T < \infty$, указывается метод отыскания приближенного решения и путь анализа устойчивости решения дифференциально-разностной системы.

В пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ состояний $u(x, t)$ системы (2) рассмотрим начально-краевую задачу (2), (5). Рассечем область Γ_T плоскостями $t = k\tau$, $\tau = T/M$, $k = 0, 1, 2, \dots, M$, при этом сечениями Γ_T при любом k являются Γ . Уравнение (2) заменим дифференциально-разностной системой

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(k)}{dx} \right) + b(x)u(k) = f_\tau(k), \quad u(0) = \varphi(x), \quad u(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0. \quad (9)$$

где $f_\tau(k) := f_\tau(x, k\tau) \in L_2(\Gamma)$ и $k = 1, 2, \dots, M$.

Функции $u(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) определены как слабые решения эллиптической системы (9). Таким образом, для фиксированного k соотношения (9) — краевая задача для эллиптического уравнения относительно $u(k)$.

Замечание. Соотношения (9) ($k = \overline{1, M}$) для фиксированного M представляют собой аналог неявной разностной схемы первого порядка аппроксимации по временному переменному t для начально-краевой задачи (2), (5).

Определение 4. Слабым решением дифференциально-разностной системы (9) называются функции $u(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k = \overline{1, M}$, удовлетворяющие тождеству

$$\int_{\Gamma} u(k)_t v(x) dx + \ell(u(k), v(x)) = \int_{\Gamma} f_\tau(k) v(x) dx,$$

для любой функции $v(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$; равенство $u(0) = \varphi(x)$ понимается почти всюду, $u(k)_t = \frac{1}{\tau}[u(k) - u(k-1)]$.

Теорема 6. При выполнении условий (3) и при $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$ функции $u(k)$ ($k = 1, 2, \dots, M$) при достаточно малых τ (когда число M разбиений отрезка $[0, T]$ достаточно большое) однозначно определяются как элементы пространства $W_0^1(a, \Gamma)$. Слабое решение начально-краевой задачи (2), (5) в пространстве $V^{1,0}(a, \Gamma_T)$ для любого фиксированного T является пределом функций $u(k)$ при $M \rightarrow \infty$.

4. Устойчивость дифференциально-разностной системы (9)

Аналогично введенным выше невозмущенному и возмущенному решениям дифференциальной системы (2) вводятся таковые для дифференциально-разностной системы (9). Обозначим их через $\bar{u}(k)$ и $u(k)$, соответственно.

Определение 5. Невозмущенное состояние $\bar{u}(k)$ дифференциально-разностной системы (9) устойчиво, если для любых $k_0 > 0$ и $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta(k_0, \epsilon) > 0$, что при выпол-

нении неравенства $\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)} < \delta(k_0, \epsilon)$ выполняется $\|u(k) - \bar{u}(k)\|_{W^1(a, \Gamma)} < \epsilon$ при всех $k \geq k_0$, где $u(k)$ — возмущенное состояние системы (9).

В силу определения 4 из утверждения теоремы 6, учитывая утверждение теоремы 5, следует устойчивость невозмущенного состояния дифференциально-разностной системы (9).

Отметим, что полученные выше результаты можно распространить на многомерный случай, аналогичному приведенному в работе [7].

Литература

1. Zhabko, A. P. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2019. – V. 15, iss. 4. – P. 457–471.
2. Провоторов, В. В. Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе / В. В. Провоторов, Е. Н. Провоторова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – Т. 13, № 2. – С. 209–224.
3. Провоторов, В. В. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе / В. В. Провоторов, А. С. Волкова. – Воронеж : Научная книга. – 2014. – 188 с.
4. Zhabko, A. P. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph / A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. – 2019. – V. 15, iss. 2. – P. 187–198.
5. Volkova, A. S. Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph / A. S. Volkova, V. V. Provotorov // Russian Mathematics. – 2014. – Вып. 58, № 3. – С. 1–13.
6. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука. – 1973. – 407 с.
7. Provotorov, V. V. Unique weak solvability of nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in the netlike domain / V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. A. Gnilitckaya // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2017. – V. 13, iss. 3. – P. 264–277.

ПЕРВАЯ СТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ СМО С ДИФфуЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д. Б. Прокопьева¹, Р. П. Шепелева², Н. И. Головкин²

¹Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С. О. Макарова

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Аннотация. В работе исследуется система массового обслуживания (СМО) с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса. Исследована первая модель стационарной СМО в виде системы дифференциальных уравнений. Доказано необходимое условие существования решения первой модели и неотрицательности характеристик числа заявок.

Ключевые слова: система массового обслуживания, диффузионная интенсивность дважды стохастического пуассоновского входного потока, стационарный режим.

Системы массового обслуживания применяются в качестве аналитических моделей информационных систем и их элементов, в медицинском обслуживании, при эксплуатации транспортных систем и т. д. Актуально моделирование и исследование систем массового обслуживания в информационных сетях. Различные типы СМО исследованы и описаны в теории массового обслуживания [1, 2]. При моделировании СМО особое внимание уделяют изучению дважды стохастических потоков [3].

В данной работе исследуется система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ . На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого λ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β . Доказано необходимое условие существования решения первой модели и неотрицательности стационарных характеристик числа заявок в рассматриваемой стационарной СМО. Такие СМО используются при моделировании web-узлов Интернет [3].

Диффузионный процесс представляет собой марковский случайный процесс второго порядка с независимыми приращениями, диффузионные операторные моменты первого и второго порядка которого равны коэффициенту сноса a и коэффициенту диффузии b соответственно [4].

Обозначим через $\hat{\lambda}$ интенсивность входного потока в стационарном режиме. Пусть $q_k(x)dx = P\{v = k, x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $q_k(x)$ — стационарные характеристики числа заявок, v — число заявок в СМО в стационарном режиме, $k \geq 0$; $f(x)dx = P\{x \leq \hat{\lambda} < x + dx\}$, $f(x)$ — стационарная плотность интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$.

Заметим, что интегралы $\int_{\alpha}^{\beta} q_k(x)dx = p_k$, $k \geq 0$, представляют собой стационарное распределение числа заявок.

Функции $f(x)$, $q_k(x)$ рассматриваем в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha, \beta]$.

В [5] показано, что функции $q_k(x)$ $k \geq 0$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, названной первой моделью стационарной СМО:

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) + \frac{b}{2} q_0''(x) = 0, \quad (1)$$

$$xq_{k-1}(x) - (x + \mu)q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) + \frac{b}{2}q_k''(x) = 0, \quad k \geq 1, \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$q'_k(\alpha) = 0, \quad q'_k(\beta) = 0, \quad k \geq 0, \quad (3)$$

условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) = f(x). \quad (4)$$

Введем производящую функцию

$$R(x, z) = \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k, \quad |z| \leq 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Обозначим область определения производящей функции

$$D_{xz} = \{(x, z) : x \in [\alpha, \beta], |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}\}.$$

Заметим, что ряд $R(x, z)$ равномерно сходится при $|z| \leq 1$, так как

$$|R(x, z)| = \left| \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k \right| \leq \sum_{k \geq 0} q_k(x) |z|^k = \sum_{k \geq 0} q_k(x) |z|^k \leq \sum_{k \geq 0} q_k(x) = f(x), \quad |z| \leq 1.$$

Следовательно, $|R(x, z)| \leq f(x)$ при $|z| \leq 1$, т. е. производящая функция $R(x, z)$ сходится равномерно по x, z на границе области D_{xz} и внутри ее.

Теорема 1. Производящая функция $R(x, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$R(x, z) \left[xz^2 - (x + \mu)z + \mu \right] + \frac{b}{2} z R_{xx}''(x, z) = (1 - z) \mu q_0(x). \quad (6)$$

Доказательство. Умножая каждое уравнение в (2) на z^{k+1} , суммируя по индексу $k \geq 1$ и добавляя уравнение (1), умноженное на z , получим уравнение относительно производящей функции

$$\begin{aligned} & xz^2 R(x, z) - (x + \mu)z (R(x, z) - q_0(x)) + \mu (R(x, z) - \\ & - q_0(x) - zq_1(x)) + \frac{b}{2} z R_{xx}''(x, z) - xzq_0(x) + \mu zq_1(x) = 0. \end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых следует уравнение (6). Теорема доказана.

Краевая задача относительно производящей функции $R(x, z)$:

$$R(x, z) \left[xz^2 - (x + \mu)z + \mu \right] + \frac{b}{2} z R_{xx}''(x, z) - (1 - z) \mu \Phi_0 R(x, z) = 0, \quad (7)$$

$$R'_x(\alpha, z) = 0, \quad R'_x(\beta, z) = 0. \quad (8)$$

Из условия нормировки (4) следует

$$R(x, 1) = \sum_{k \geq 0} q_k(x) = f(x). \quad (9)$$

В результате суммирования уравнений (1)–(3) получим краевую задачу относительно $f(x)$: $f''(x) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f'(\beta) = 0$, решение которой представляет собой плотность равномерного распределения $f(x) = 1/(\beta - \alpha)$.

Обозначим $\bar{\lambda} = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$ — среднее значение интенсивности входного потока в стационарном режиме.

Теорема 2. Необходимое условие существования решения первой модели стационарной СМО и неотрицательности характеристик $q_k(x)$, $k \geq 0$, имеет вид

$$\bar{\lambda} < \mu, \quad (10)$$

причем вероятность простоя СМО равна

$$p_0 = \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (1 - x / \mu) f(x) dx. \quad (11)$$

Доказательство. Представив выражение $xz^2 - (x + \mu)z + \mu$ в виде

$$x(z-1)\left(z - \frac{\mu}{x}\right) = (1-z)(\mu - xz)$$

преобразуем уравнение (6) к виду

$$(1-z)(\mu - xz)R(x, z) + \frac{b}{2} z R''_{xx}(x, z) = (1-z)\mu q_0(x). \quad (12)$$

Из граничных условий следует

$$\int_{\alpha}^{\beta} R''_{xx}(x, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left(R'_x(x, z)\right)'_x dx = R'_x(x, z) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = \sum_{k \geq 0} q'_k(x) z^k \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} = 0.$$

Проинтегрировав уравнение (12) по $x \in [\alpha, \beta]$ и разделив уравнение на $1-z$, получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\mu - xz) R(x, z) dx = \mu \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x) dx. \quad (13)$$

При $z=1$ равенство (13) преобразуется к виду

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\mu - x) f(x) dx = \mu \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x) dx, \quad (14)$$

откуда следует

$$p_0 = \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (1 - x / \mu) f(x) dx. \quad (15)$$

Представим уравнение (13) в виде

$$\mu \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k dx - z \int_{\alpha}^{\beta} x \sum_{k \geq 0} q_k(x) z^k dx = \mu \int_{\alpha}^{\beta} q_0(x) dx,$$

откуда после приведения подобных слева и справа при z^0 в результате простейших преобразований получим

$$\sum_{k \geq 1} \int_{\alpha}^{\beta} q_k(x) dx z^k = \sum_{k \geq 1} \int_{\alpha}^{\beta} (x / \mu) q_{k-1}(x) dx z^k.$$

Из последнего равенства при z^k следуют равенства

$$p_{k+1} = \int_{\alpha}^{\beta} q_{k+1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x / \mu) q_k(x) dx, \quad k \geq 0. \quad (16)$$

Покажем, что при условии (10) вероятность p_0 того, что в СМО в стационарном режиме нет заявок, строго положительна.

Если $p_0 < 0$, то из (15) следует $\bar{\lambda} > \mu$, что противоречит условию (10).

Предположим, что $p_0 = 0$, тогда в (15) либо $q_0(x) \equiv 0$ либо $q_0(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$.

При $q_0(x) \equiv 0$ из (16) следует, что $p_1 = 0$. При этом либо $q_1(x) \equiv 0$ либо $q_1(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$.

Продолжая рассуждения, из (16) получим, что при $q_k(x) \equiv 0$, $k \geq 1$ следует, что $p_{k+1} = 0$, $k \geq 1$. При этом либо $q_{k+1}(x) \equiv 0$ либо $q_{k+1}(x)$ может принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$.

Если $q_k(x) \equiv 0$, $k \geq 0$, и $p_k = 0$, $k \geq 0$, то это противоречит условию нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Если $p_0 = 0$, т. е. $\bar{\lambda} = \mu$, функции $q_k(x)$, $k \geq 0$, могут принимать отрицательные значения при $x \in [\alpha, \beta]$, то отсюда следует, что условие $\bar{\lambda} = \mu$ не является необходимым условием неотрицательности $q_k(x)$, $k \geq 0$. Следовательно, необходимым условием неотрицательности характеристик $q_k(x)$, $k \geq 0$, является условие $\bar{\lambda} < \mu$, т. е. (10). При этом неотрицательные характеристики $q_k(x)$, $k \geq 0$, удовлетворяют уравнениям (12), (13).

Таким образом, показано, что существует решение $R(x, z)$ краевой задачи (7)–(9) в виде ряда с неотрицательными коэффициентами $q_k(x)$, $k \geq 0$, т. е. показано, что (10) является необходимым условием существования стационарного режима в СМО. Теорема доказана.

Литература

1. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. Климов, Г. П. Теория массового обслуживания / Г. П. Климов. – М. : Изд-во Московского университета, 2011. – 312 с.
3. Головкин, Н. И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 2, № 34. – С. 50–64.
4. Баруча-Рид, А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / Пер. с англ. В. В. Калашникова; ред. А. Н. Ширяева. – М. : Наука, 1969. – 511 с.
5. Прокопьева, Д. Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головкин // Известия Калининградского гос. технич. ун-та. – 2017. – № 46. – С. 184–193.

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ К КЛАССИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ И ДРОБНЫМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

С. М. Ситник

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. В статье рассмотрены результаты, которые недавно были доказаны и опубликованы по теории операторов преобразования. Среди этих результатов содержатся такие приложения как приложения к теории потенциала, сингулярным дифференциальным уравнениям, обратным задачам.

Ключевые слова: Оператор преобразования, оператор Бесселя, дробные интегралы Римана — Лиувилля.

В этом тексте изложены некоторые современные исследования по теории операторов преобразования и их приложениям. Рассматриваются определённые типы дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, основное внимание уделяется уравнениям с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{\nu}{x} \frac{d}{dx} u(x). \quad (1)$$

Такие уравнения относятся к сингулярным или вырождающимся, к ним также сводятся многие уравнения смешанного типа. Опишем ряд недавних публикаций и материалов по тематике операторов преобразования и их приложений подробнее.

Как указано в [1–4], теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова. К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона. Особо следует выделить введённый В. В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана — Лиувилля, В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В. В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «К-следом» в честь В. В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним. В терминах «К-следа» получается полная характеристика решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе

для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки, включая существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области. Существенные результаты были также получены В. В. Катраховым в такой классической области, как теория операторов дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля. Им получены новые формулы композиций и оценки весовых норм для этого класса операторов.

Монография В. В. Катрахова и С. М. Ситника [1] составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В. В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Надеюсь, что эта книга будет способствовать более широкой известности результатов В. В. Катрахова, которые представляют существенный интерес для теории вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений, а также их разработке в русле идей и методов теории операторов преобразования. Кроме того, в книге отражён вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций.

В монографии Э. Л. Шишкиной [2] развивается теория гиперболических уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также конструируются и обращаются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом. В первой главе приведены необходимые обозначения, определения, вспомогательные факты и утверждения. Во второй главе изучены некоторые весовые обобщенные функции, связанные с квадратичной формой, которые в дальнейшем применяются для построения дробных степеней гиперболических операторов, а также решений гиперболических уравнений с операторами Бесселя. Объектом исследования третьей главы являются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом, реализующие отрицательные вещественные степени сингулярного волнового оператора, т. е. волнового оператора, где вместо вторых производных действует оператор Бесселя. Исследуются вопросы ограниченности такого оператора, его свойства, а также строится обратный к нему оператор. Кроме того, в этой главе изучен гиперболический В-потенциал Рисса. В четвертой главе рассмотрены различные методы решения общего уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Получены решения задач Коши для однородного и неоднородного уравнений указанного типа. В заключении приведены сведения об общих методах решения задач для произвольных сингулярных операторов.

Дополним, что монографии [1] и [2] переведены на английский язык и вскоре переводы будут опубликованы издательством Шпрингер.

Следует подчеркнуть, что, к сожалению, на русском языке долгое время отсутствовали специализированные монографии, посвященные общей теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Монография С. М. Ситника и Э. Л. Шишкиной [3] в определенной степени заполняет этот пробел. Изложим структуру и основное содержание монографии [3]. Отметим, что существенная часть результатов, изложенных в [3], получена авторами, часть из них публикуется там впервые.

Текст монографии разделён на три части. В первой части «Общая теория операторов преобразования» рассматриваются определение операторов преобразования, основные исторические сведения, необходимые факты из теории специальных функций, функциональных пространств и интегральных преобразований. Отметим более подробное изложение свойств преобразования Меллина, включая теорему Слейтера а также обзор основных конструкций

дробного интегродифференцирования. Далее излагаются результаты о различных классах операторов преобразования: Сонина — Пуассона, Бушмана — Эрдейи, Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова. Изложены основные свойства операторов обобщённого сдвига и весовых сферических средних. Во второй части «Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных» рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи, Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах, лемме Копсона, задаче Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу, установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений, включая задачу А. В. Бицадзе — В. И. Пашковского для уравнения Максвелла — Эйнштейна, приложения к решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Здесь же рассмотрен важный вопрос об эквивалентности норм пространств И. А. Киприянова и весовых пространств С. Л. Соболева, а также изучено общее уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу, включая ранее не рассмотренные в литературе случаи особых параметров и начальных условий. Также изложена теория явных представлений для дробных степеней оператора Бесселя, кратко намечены их приложения к некоторым интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка. В третьей части «Методы построения ОП для оператора Бесселя и родственных операторов» излагается принадлежащий С. М. Ситнику композиционный метод построения операторов преобразования (ITCM — Integral Transforms Composition Method). Этим методом получаются по единой схеме все известные ранее в явном виде операторы преобразования, а также построены многочисленные новые классы операторов преобразования. Рассмотрены приложения композиционного метода к решению некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений. В этой части также изложены результаты для дифференциальных операторов Бесселя, возмущённых потенциалами достаточно общего вида.

В опубликованной в 2020 г. издательством Elsevier в основанной Р. Беллманом престижной серии *Mathematics in Science and Engineering* монографии Э. Л. Шишкиной и С. М. Ситника [4] изложены на английском языке для широкой международной профессиональной аудитории основные вопросы современной теории операторов преобразования и их приложений. Существенную часть этой книги занимают результаты Э. Л. Шишкиной по теории обобщённых потенциалов и их приложениям к дифференциальным уравнениям с особенностями.

Также в 2020 г. в издательстве Springer в серии *Trends in Mathematics* был опубликован сборник работ [5] под редакцией В. В. Кравченко и С. М. Ситника по современной теории операторов преобразования. В сборник вошли работы известных математиков Amin Boumenir, Vu Kim Tuan (USA), Djurdje Cvijovic (Serbia), Tibor K. Pogany (Croatia), Sh. T. Karimov (Uzbekistan), D. B. Karp (Israel, Vietnam, Russia), E. L. Shishkina (Poland), О. В. Скоромник, Л.Е. Хвоцинской (Белоруссия), Ahmed Fitouhi (Tunisia), Yu. F. Luchko (Germany), В. В. Кравченко (Мексика), а также С. М. Ситника, Л. Бритвиной, Е. Прилепкиной, С.П. Хэкало, В. В. Мещерекова, К. О. Политова, А. А. Ларина, А. Б. Муравника, В. Б. Васильева, С. Бутерина, А. В. Глушака, О. Яремко, В. А. Юрко, В. Е. Фёдорова, М. М. Маламуда, А. В. Псху, В. Ф. Молчанова, М. В. Плехановой, И. П. Половинкина, М. В. Шитиковой, Н. В. Зайцевой (Россия). В этом сборнике отражён весь спектр задач современной теории операторов преобразования и их многочисленных приложений.

В 2020 г. в издательстве Springer опубликована монография В.В. Кравченко [6]. В этой монографии изложены новые подходы к решению прямых и обратных спектральных задач для уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси и оси. На основе предложенных методов разработаны эффективные численные методы для решения этих задач, которые во многом превосходят методы, известные ранее. Методы решения одномерных обратных задач и обратных задач рассеяния традиционно тесно связаны с теорией операторов преобразования и во многом основаны на результатах этой теории.

Отметим также организованную В. В. Кравченко в октябре 2019 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее по-русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков В. В. Кравченко, В. С. Рабинович, С. Грудский, Э. Л. Шишкина, С. Торба, М. Портер, С. М. Ситник, и ряд других.

Таким образом, теория операторов преобразования является живой и активной ветвью как теоретической математики, так и их многочисленных приложений. Операторам преобразования посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся ведущими мировыми издательствами монографий и сборников.

Литература

1. Камрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – Т. 64, № 2. – С. 211–426.
2. Шишкина Э. Л. Общее уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу и гиперболические В-потенциалы // Современная математика. Фундаментальные направления. Уравнения в частных производных. – 2019. – Т. 65, № 2. – С. 157–338.
3. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. – М. : Физматлит, 2019. – 246 с.
4. Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press. – 2020. 592 p.
5. Ed. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. Transmutation Operators and Applications. In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser. – 2020. – XVII. – 686 p.
6. Kravchenko V. V. Forward and Inverse Sturm — Liouville Problems: A Method of Solution. In the Series: Frontiers in Mathematics. – Springer, 2020. – 155 p.
7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics — I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. – 2019.

О РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЕ

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье изучаются однородные пространства функций, заданных на локально компактной абелевой группе, со значениями в комплексном банаховом пространстве. В частности, однородными являются пространства Степанова, Лебега, функций ограниченной вариации и непрерывных функций, а также многие их подпространства. Статья посвящена исследованию почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств. Для таких функций дается четыре различных определения. Первое определение приводится в терминах фактор-пространства. Второе, являющееся аналогом определения Г. Бора почти периодической функции, основывается на понятии ε -периода. Третье определение основано на аппроксимационной теореме. Четвертое соответствует критерию С. Бохнера почти периодичности функций. С использованием результатов теории почти периодических векторов в банаховых модулях доказывается эквивалентность всех четырех определений.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, локально компактная абелева группа, однородное пространство, банахов модуль.

1. Однородные пространства функций

Символом X обозначим комплексное банахово пространство, $End X$ — банахову алгебру линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X . Символом $L^1_{loc}(G, X)$ обозначим линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на локально компактной абелевой группе G (классов эквивалентности) функций со значениями в X .

Банахово пространство $\mathcal{F}(G, X)$ функций, определенных на группе G , со значениями в X , назовем *однородным*, если выполняются следующие условия:

(а) пространство $\mathcal{F}(G, X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(G, X)$ (см. пример 1), причем вложение $\mathcal{F}(G, X) \subset S^1(G, X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

(б) в пространстве $\mathcal{F}(G, X)$ определена и ограничена сильно непрерывная группа $S(g)$, $g \in G$, операторов сдвигов функций, задаваемая формулой

$$(S(t)x)(g) = x(g+t), \quad g, t \in G, \quad x \in \mathcal{F}(G, X); \quad (1)$$

(с) свертка

$$(f * x)(g) = \int_G f(\tau)x(g-\tau)d\tau = \int_G f(\tau)(S(-\tau)x)(g)d\tau, \quad g \in G, \quad (2)$$

двух любых функций $f \in L^1(G)$ и $x \in \mathcal{F}(G, X)$ принадлежит $\mathcal{F}(G, X)$ и выполнено неравенство $\|f * x\| \leq C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C \geq 1$ (как правило, $C = 1$);

(д) для любой функции $x \in \mathcal{F}(G, X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(G)$ с компактным носителем $\text{supp } \varphi$ функция вида φx принадлежит пространству $\mathcal{F}(G, X)$, причем справедлива оценка $\|\varphi x\| \leq \|\varphi\|\|x\|$ и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : G \rightarrow \mathcal{F}(G, X)$ непрерывно.

Для случая $G = \mathbb{R}$ однородные пространства функций изучались в работах [1, 2].

Пример 1. Указанные далее банаховы пространства функций являются однородными. Все они являются линейными подпространствами из $L^1_{loc}(G, X)$.

1. Пространства $L^p = L^p(G, X)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов) функций. Нормы в данных пространствах имеют вид $\|x\|_p = \left(\int_G \|x(g)\|_X^p dg \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$.

2. Пространство $L^\infty = L^\infty(G, X)$ существенно ограниченных (классов) функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{g \in G} \|x(g)\|_X$.

3. Пространства Степанова $S^p = S^p(G, X)$, $p \in [1, \infty)$ (см. [3, 4]), состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(G, X)$, для которых конечна величина $\|x\|_{S^p} = \sup_{g \in G} \left(\int_V \|x(g+s)\|_X^p ds \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$, где V — некоторая компактная окрестность нуля группы G . Следует заметить, что пространство $S^p(G, X)$ не зависит от выбора V и соответствующие нормы эквивалентны. Кроме того, для компактной группы G справедливо равенство $S^p(G, X) = L^p(G, X)$.

4. Пространство $C_b = C_b(G, X)$ ограниченных непрерывных функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{g \in G} \|x(g)\|_X$, $x \in C_b$ ($C_b(G, X)$ — замкнутое подпространство из $L^\infty(G, X)$).

5. Подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(G, X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций из C_b .

6. Подпространство $C_0 = C_0(G, X) \subset C_{b,u}$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций.

7. Пространства $C^k = C^k(G, X)$, $k \in \mathbb{N}$, функций, k раз непрерывно дифференцируемых, с ограниченной k -й производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

В дальнейшем символом $\mathcal{F}(G, X)$ будем обозначать однородное пространство. Символом $\mathcal{F}_c(G, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(G, X)$ вида $\mathcal{F}_c(G, X) = \{x \in \mathcal{F}(G, X) : \text{функция } g \mapsto S(g)x : G \rightarrow \mathcal{F}(G, X) \text{ непрерывна}\}$. Через $\mathcal{F}_0(G, X)$ будет обозначаться наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(G, X)$, содержащее все функции ϕx , $x \in \mathcal{F}(G, X)$, $\phi \in C_b(G, X)$, где функция ϕ бесконечно дифференцируема и $\text{supp } \phi$ — компакт.

Непосредственно из определения однородного пространства следует, что любое однородное пространство является банаховым $L^1(G)$ -модулем, в котором действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура задается сверткой функций (2). Таким образом, для исследования этих пространств можно применить спектральную теорию банаховых модулей над алгеброй $L^1(G)$ (см. [5, 6]). В частности, из этого следует, что пространства $\mathcal{F}_c(G, X)$ совпадают с пространствами S -непрерывных векторов (см. [1]).

2. Почти периодические векторы в банаховых модулях

Здесь приводится ряд используемых далее понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей (см. [3–6]), над банаховой алгеброй $L^1(G)$ измеримых суммируемых на локально компактной абелевой группе G функций. Умножение в алгебре $L^1(G)$ осуществляется с помощью операции свертки $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g-s)f_2(s)ds$, $g \in G$, $f_1, f_2 \in L^1(G)$, и полагается $\|f\|_1 = \int_G |f(g)|dg$ для $f \in L^1(G)$.

Пусть $T : G \rightarrow \text{End } \mathcal{U}$ — сильно непрерывное изометрическое представление группы G операторами из банаховой алгебры $\text{End } \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ — комплексное банахово пространство. Тогда формулой

$$fx = \int_G f(g)T(-g)xdg, \quad f \in L^1(G), \quad x \in \mathcal{U}, \quad (3)$$

задается на $\mathcal{U}$ структура банахова $L^1(G)$ -модуля. Учитывая формулу (3), далее модуль $\mathcal{U}$ будет иногда обозначаться через $(\mathcal{U}, T)$.

Пусть $\hat{G}$ — двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G . Далее через $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(G): \hat{f}(\gamma) = \int_G f(g)\gamma(-g)dg$, $\gamma \in \hat{G}$. Если $G = \mathbb{Z}$, то $\hat{G}$ канонически отождествляется с $\mathbb{T}$ и преобразование Фурье последовательности (функции) $f \in L^1(\mathbb{Z}) = \ell^1(\mathbb{Z})$ имеет вид: $\hat{f}(\gamma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\gamma^{-n}$, $\gamma \in \mathbb{T}$.

Спектром Бёрлинга вектора x из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ называется множество $\Lambda(x) = \Lambda(x, T)$ характеров из группы $\hat{G}$, являющееся дополнением к множеству

$$\{\gamma \in \hat{G} : \text{существует } f \in L^1(G) \text{ такая, что } \hat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ и } fx = 0\},$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda(x) = \{\gamma \in \hat{G} : fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L^1(G) \text{ с } \hat{f}(\gamma) \neq 0\}.$$

Имеют место следующие свойства спектра векторов из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ (см. [3, 4]).

Лемма 1. Для любых $f \in L^1(G)$ и $x \in (\mathcal{Y}, T)$ справедливы свойства :

- 1) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\hat{G}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 2) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;
- 3) $\Lambda(Bx) \subset \Lambda(x)$ для любого оператора $B \in \text{End } \mathcal{Y}$, перестановочного с операторами $T(g)$, $g \in G$;
- 4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$ и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;
- 5) $\Lambda(x) = \{\gamma_0\}$ — одноточечное множество из $\hat{G}$ тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет равенствам $T(g)x = \gamma_0(g)x$, $g \in G$, и $x \neq 0$ (является собственным вектором представления T , отвечающим характеру γ_0).

Множество $\Omega \subset G$ называется относительно плотным на G , если существует компактная окрестность $V = V_\varepsilon$ нуля группы G такая, что $(g + V_\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $g \in G$.

В следующем определении почти периодических векторов и их свойствах мы следуем [5].

Вектор x_0 из банахова $L^1(G)$ -модуля $(\mathcal{Y}, T)$ называется *почти периодическим* (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

- 1) для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_{\varepsilon, x_0} = \{\omega \in G : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon\}$ ε -периодов вектора x_0 относительно плотно на G ;
- 2) орбита $\{T(g)x_0, g \in G\}$ вектора x_0 предкомпактна в $\mathcal{Y}$;
- 3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют характеры $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ и соответствующие им собственные векторы $x_1, \dots, x_N$ представления T (т. е. $T(g)x_k = x_k\gamma_k$, $g \in G$, $1 \leq k \leq N$) такие, что $\left\|x_0 - \sum_{k=1}^N x_k\right\| < \varepsilon$;
- 4) функция $t \mapsto \varphi(g) = T(g)x_0$, $g \in G$, — непрерывная почти периодическая функция, т. е. $\varphi \in AP(G, \mathcal{Y})$ (см. [5]).

Множество $AP\mathcal{Y} = AP(\mathcal{Y}, T)$ почти периодических векторов из $\mathcal{Y}$ образует замкнутый подмодуль из $\mathcal{Y}$.

3. Почти периодические на бесконечности функции

Пусть $\mathcal{F}(G, X)$ — однородное пространство определенных на группе G функций со значениями в банаховом пространстве X . В нем действует группа сдвигов функций

$$S: G \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(G, X), \quad (S(g)x)(s) = x(s+g), \quad s, g \in G, x \in \mathcal{F}(G, X).$$

Функция $x \in \mathcal{F}_c(G, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если для любого $g \in G$ функция $S(g)x - x$ принадлежит $\mathcal{F}_0(G, X)$.

Множество функций из $\mathcal{F}(G, X)$, медленно меняющихся на бесконечности, обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty}(G, X)$. Отметим, что оно образует замкнутое подпространство банахова пространства $\mathcal{F}(G, X)$, инвариантное относительно группы сдвигов S .

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(G, X) / \mathcal{F}_0(G, X)$. В $\mathcal{Y}$ действует сильно непрерывная группа изометрий

$$T(g)\tilde{x} = \widetilde{S(g)x} = S(g)x + \mathcal{F}_0(G, X), \quad g \in G, x \in \mathcal{F}(G, X).$$

Следовательно, фактор-пространство $\mathcal{Y}$ наделяется структурой банахова $L^1(G)$ -модуля по представлению $T: G \rightarrow \text{End } \mathcal{Y}$ (см. формулу (3)).

Определение 1. Функция $x \in \mathcal{F}_c(G, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс $\tilde{x}$ принадлежит $AP(\mathcal{Y}, T)$, где $\mathcal{Y} = \mathcal{F}(G, X) / \mathcal{F}_0(G, X)$.

Множество функций из $\mathcal{F}(G, X)$, почти периодических на бесконечности, обозначаемое символом $AP_\infty \mathcal{F}(G, X)$, образует замкнутое подпространство банахова пространства $\mathcal{F}(G, X)$, инвариантное относительно группы сдвигов S . Отметим, что для некоторых однородных пространств подпространство $AP_\infty \mathcal{F}(G, X)$ может состоять только из нулевой функции (например, для $L^p(\mathbb{R}, X)$). Почти периодические на бесконечности функции из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ рассматривались в [1, 2]. Периодические на бесконечности функции из однородных пространств изучались в работах [1, 7], равномерно непрерывные ограниченные Периодические на бесконечности функции — в работах [8, 9].

Определение почти периодической на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}_+, X)$) было дано в [3] для функций из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ и использовалось для описания асимптотического поведения ограниченных полугрупп операторов класса C_0 . Следуя Г. Бору, можно дать другое (эквивалентное) определение почти периодической на бесконечности функции, используя понятие ε -периода (на бесконечности).

Пусть $\varepsilon > 0$. Элемент g_0 из группы G называется ε -периодом на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(G, X)$, если существует компакт $K = K_\varepsilon \subset G$ такой, что $\sup_{g \in G \setminus K} \|x(g + g_0) - x(g)\| < \varepsilon$. Множество ε -периодов на бесконечности функции x обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 2. Функцию $x \in \mathcal{F}(G, X)$ назовем *почти периодической на бесконечности*, если множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ относительно плотно на G .

Приведем еще два определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства и затем докажем эквивалентность всех четырех введенных определений.

Определение 3. Функция x из однородного пространства $\mathcal{F}(G, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}(G, X)$, представимые в виде $x_k = x_k^0 \gamma_k$, $1 \leq k \leq n$, где γ_k — характер из группы $\hat{G}$ и функции $x_k^0 \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(G, X)$ такие, что $\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\| < \varepsilon$.

Множество функций $M \subset \mathcal{F}(G, X)$ назовем *предкомпактным на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $x_1, \dots, x_n$ (ε -сеть на бесконечности) из M таких, что для любой функции $x \in M$ найдутся функции $x_\varepsilon \in \mathcal{F}_0(G, X)$ и x_k ($1 \leq k \leq n$) такие, что

$$\|x - x_\varepsilon - x_k\| < \varepsilon.$$

Определение 4. Функция $x \in \mathcal{F}(G, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если множество ее сдвигов $M = \{S(g)x, g \in G\}$ предкомпактно на бесконечности.

Отметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k \gamma_k, \quad x_1, \dots, x_N \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(G, X), \gamma_1, \dots, \gamma_N \in \hat{G},$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) являются почти периодическими на бесконечности в смысле определения 4.

Для $\mathcal{F}_c(G, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ определение 4 соответствует критерию С. Бохнера (см. [10]) почти периодичности функций, определения 3 и 1 почти периодических на бесконечности функ-

ций даны в статьях [3, 11, 12]. При $\mathcal{F}_c(G, X) = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ пространство $AP_\infty \mathcal{F}(G, X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Теорема 1. Все четыре определения почти периодической на бесконечности функции (определения 1, 2, 3, 4) эквивалентны. Множество $AP_\infty \mathcal{F}(G, X)$ почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(G, X)$ образует банахово пространство.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = \mathcal{F}(G, X) / \mathcal{F}_0(G, X)$ и определенную выше группу изометрий $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Для представления $T = \tilde{S}$ определение 3 соответствует свойству 3) из определения почти периодического вектора. Поскольку все свойства из определения 1 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 2, 4 и 3 соответственно.

Пусть $x \in \mathcal{F}(G, X)$ и $\tilde{x}$ — класс эквивалентности в $\mathcal{X}$, построенный по функции x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{F}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$ ε -периодов класса $\tilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 4 и свойства 2) определения почти периодического вектора непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X}$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 3 и свойства 4) из определения почти периодического вектора. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathcal{X}$, $\tilde{y} = y + \mathcal{F}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in \mathcal{F}(G, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in G$, где $y_0 \in (\mathcal{F}_0)_{sl, \infty}$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in G$ (см. свойство 5) из леммы 1). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in G$, и поэтому $\tilde{S}(t) \setminus \tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in G$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{F}_0(G, X)$, $t \in G$, т. е. $y_0 \in (\mathcal{F}_0)_{sl, \infty}$.

И обратно: если $y = y_0\gamma_0$, где $y_0 \in \mathcal{F}_0(G, X)$, γ_0 — характер из $\hat{G}$, то $\tilde{S}(g)\tilde{y} = \gamma_0(g)\tilde{y}$, и поэтому в силу свойства 5) из леммы 1 получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\gamma_0\}$.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-01-00732 А.

Литература

1. Гармонический анализ периодических и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и гармоничных распределений / А. Г. Баскаков, В. Е. Струков, И. И. Струкова // Матем. сборник. – 2019. – Т. 210, № 10. – С. 37-90. DOI: 10.1070/SM9147.
2. Струков, В. Е. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства / В. Е. Струков, И. И. Струкова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2018. – Т. 50, № 3. – С. 254–264.
3. Баскаков, А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. – 2013. – Т. 68. – № 1. – С. 77–128. DOI: 10.4213/rm9505.
4. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А. Г. Баскаков, И. А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. – 2005. – Т. 69. – № 3. – С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.
5. Баскаков, А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А. Г. Баскаков // СМФН. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151. DOI: 10.1007/%2Fs10958-006-0286-4.

6. Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. / Э. Хьюитт, К.А. Росс. – М. : Мир, 1975. – 899 с.
7. Струкова, И. И. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях / И. И. Струкова // Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 4. – С. 195–205.
8. Baskakov, A. Harmonic analysis of functions periodic at infinity / A. Baskakov, I. Strukova // Eurasian Math. J. – 2016. – V. 7, No. 4. – P. 9–29.
9. Струкова, И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57. – № 1. – С. 186–198.
10. Левитан, Б. М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.
11. Баскаков, А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве / А. Г. Баскаков // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 2. – С. 174–190.
12. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / А. Г. Баскаков, И. И. Струкова, И. А. Тришина // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 2. – С. 293–308.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ТИПА ФЛОРИНА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Р. Н. Тураев

Чирчикский государственный педагогический университет

Аннотация. В настоящей работе изучаются математические модели фильтрации для квазилинейного параболического уравнения вида задач со свободной границей типа Флорина с нелинейным граничным условием. Установлены априорные оценки Шаудерского типа. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи метода неподвижной точки Шаудера.

Ключевые слова: задача Флорина, математические модели фильтрации, априорные оценки Шаудерского типа, принцип экстремума, нелинейная граничная условия, эквивалентность задач, существование и единственность решения.

Введение

На сегодняшний день в современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи гидро- и газодинамики, физики плазмы, теории химических реакций и др [1]. При этом многие из указанных задач для параболических уравнений приводятся к краевым задачам со свободной границей. Задачи со свободной границей возникают при математическом описании тепловых процессов, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, движения жидкости в пористой среде. Связи с этим они находят широкое применение в металлургии, при изучении процессов сварки, электронной и плазменной обработки материалов, в теории электрических контактов, в геотермии, мерзлотоведении, теории фильтрации, математической биологии, экологии, биомедицины и т. д. [2, 3].

В основном рассматривается три типа задач со свободными границами: Стефана, Флорина и Маскета-Веригина. Одной из представителей таких задач является задача Флорина (условие для свободной границы задается в неявной для этой границы форме). Небольшую историю имеет задача Флорина, впервые она возникла в гидростроительстве при устройстве противофильтрационных завес, когда в породе основания и берегов примыканий плотин нагнетаются глинистые растворы [4, 5].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с нелинейным граничным условием.

Постановка задачи

Требуется найти на некотором отрезке $0 \leq t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t, x)$ в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t, x) = a(t, x, u)u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in D, \quad (1)$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (2)$$

$$u_x(t, 0) = f(t, u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $s(t)$ — свободная (неизвестная) граница, которая определяется вместе с функциями $u(t, x)$, $a(t, x, u)$ — коэффициент фильтрации.

Задача (1)–(5) обобщает ранее рассмотренные задачи возникающие при изучении фильтрации с учетом влияния связанной воды. Именно вопросы существования и единственности классического решения однофазной одномерной задачи Флорина изучались в работах [6–9], когда $a(t, x, u) = 1$ и условия (3) задано линейными. Асимптотическое поведение решения при $t \rightarrow \infty$ рассматривается в работе [10].

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. $f(t, \xi)$ определена и непрерывна при $t \geq 0, |\xi| < \infty$, она ограничена вместе с производными в замкнутом множестве своих аргументов.

2. Функции $a(t, x, u)$, $a'_u(t, x, u)$, $a''_{uu}(t, x, u)$, $a''_{ux}(t, x, u)$ и $a''_{xx}(t, x, u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(t, x, u) \geq a_0 > 0$.

3. $\varphi(x)$ трижды, $\psi(t)$ один раз непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi'''(x)$, $\psi'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в т. ч. рассматриваемых в вспомогательных задачах), в частности

$$\varphi'(0) = f(0, \varphi(0)), \quad \varphi(s_0) = 0, \quad \varphi'(s_0) = \psi(0) = \psi_0,$$

$$f'_t(0, \varphi(0)) = a(0, 0, \varphi(0))\varphi'''(0) + a'_u(0, 0, \varphi(0))\varphi'(0) \cdot \varphi''(0) + a'_x(0, 0, \varphi(0))\varphi''(0) - \\ - f'_u(0, \varphi(0)) \cdot a(0, 0, \varphi(0)) \cdot \varphi''(0);$$

$$\psi(0) = a(0, s_0, \varphi(s_0))\varphi'''(s_0) + a'_u(0, s_0, \varphi(s_0))\varphi'(s_0) \cdot \varphi''(s_0) + a'_x(0, s_0, \varphi(s_0)) \cdot \varphi'(s_0).$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются априорные оценки для решений $u(t, x)$.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x) \leq 0$ и для любого $u(t, x)$ справедливо неравенство $f(t, u) \geq \psi(t) \geq \psi_0 > 0$, $\frac{f(t, u) - f(t, 0)}{u} \geq f_0 = \text{const} > 0$. Тогда для решения задачи (1)–(5) в области $\bar{D}$ справедлива оценка

$$-M_1 \leq u(t, x) \leq 0, \quad (6)$$

$$\text{где } M_1 = \max \left\{ \frac{1}{f_0} \left[\max_{0 \leq t \leq T} |f(t, 0)|, \max_{0 \leq x \leq s_0} |\varphi(x)| \right] \right\}.$$

Далее, устанавливаются некоторые априорные оценки для решений и их производные. Чтобы оценить $u_x(t, x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого поставленную задачу (1)–(5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t)$, $u_x(t, x)$.

Обозначим $u_x(t, x) = v(t, x)$. Тогда из задачи (1)–(5) получим следующую задачу

$$v_t(t, x) = a(t, x, u)v_{xx}(t, x) + a'_u(t, x, u)v(t, x) \cdot v_x(t, x) + a'_x(t, x, u)v_x(t, x), \quad (t, x) \in D, \quad (7)$$

$$v(0, x) = \varphi'(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \quad (8)$$

$$v(t, 0) = f(t, u(t, 0)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$v(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

$$\psi(t) \cdot \dot{s}(t) = -a(t, s(t), 0)v_x(t, s(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

Лемма 2. Пусть $\varphi'(x) \geq \psi(t) \geq \psi_0 > 0$ и для ограниченных $u(t, x)$ справедливо неравенство $f(t, u) \geq \psi(t) \geq \psi(0)$, а также выполнены условия леммы 1. Тогда справедлива следующая оценка

$$0 < \psi_0 \leq \psi(t) \leq v(t, x) = u_x(t, x) \leq M_2, \quad (t, x) \in \bar{D}, \quad (12)$$

где $M_2 = \max \left\{ \max_x |\varphi'(x)|, \max_t |\psi(t)|, \max_t |f(t, u(t, 0))| \right\}$.

Теперь изучается поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени.

Теорема 1. Пусть $\psi'(t) \geq 0$, $a'_u(t, x, u) \geq 0$, $a'_x(t, x, u) \geq 0$ и выполнены условия леммы 2. Тогда существует такая постоянная N , зависящая от заданных функций, что справедливы неравенства

$$0 < \dot{s}(t) \leq N, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где $N = \max \left\{ \max_{0 \leq x \leq s_0} \frac{|\varphi'(x) - f_0|}{s_0 - x}, \max_{0 \leq t \leq T} \frac{|\psi(t) - f(t)|}{s_0} \right\}$.

Далее устанавливаются априорные оценки $|v_x|$, $|v|_{1+\gamma}^D$ и $|v|_{2+\gamma}^D$ в норм Гельдера. На основе установленных оценок доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученных и первоначальных задач методом неподвижной точки Шаудера [12].

Литература

1. Самарский А. А., Вабичевич П. Н. Вычислительная теплопередача. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Fasano A. Mathematical Models of Some Diffusive Processes with Free Boundaries. MAT - Serie A. – 2004. – 8. – P. 11–19.
3. Murray J. D. Mathematical Biology: Spatial Models and Biomedical Applications. – New York: Springer-Verlag, 2004, 811 p.
4. Takhirov J., Turaev R. The free boundary problem without initial condition // J. Math. Sci. – 2012. – 187, No. 1. – P. 86–100.
5. Флорин В. А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористой с учетом влияния связанной воды // Изв. АН СССР. – 1951, ОТН, №11. – С. 1625–1649.
6. Венцель Т. Д. Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 131, № 5. С. 1000–1003.
7. Нгуен Дин Чи Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения // Вестник МГУ. Сер 1. Мат.Мех. – 1966. – № 2. – С. 40–54.
8. Нгуен Дин Чи Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнения // Вестник МГУ. – 1966. № 5. – С. 51–62.
9. Syons D. M., Martin R. N. A moving boundary problem modeling diffusion with nonlinear absorption // J. Differ. Equat. – 1984. – 51, No.2. – P. 267–294.
10. Бочарова И. В. Об асимптотике решений одной задачи со свободной границей для уравнения теплопроводности. // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 143, № 2. – С. 259–261.
11. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Труды Моск. Матем. общ.ва. – 1967. – Т. 16. – С. 329–346.
12. Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Задача с нелокальным условием на свободной границе // Укр. Мат. Журнал. – 2012. – Т. 64, № 1. – С. 38–46.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. К. Уринов, К. Т. Каримов

Ферганский государственный университет

Аннотация. В данной работе, в областях состоящей из частей шара, для уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными коэффициентами сформулирована спектральная задача Дирихле — Неймана. Выделена область значений параметра λ , где нет собственных значений задачи, и найдены счетное число собственных значений задачи и построены собственные функции соответствующих найденным собственным значениям.
Ключевые слова: эллиптическое уравнение, сингулярный коэффициент, функция Гаусса, функция Аппеля, собственные значения, собственные функции.

1. Введение. Постановка задачи

Известно, что в последнее время интенсивно исследуются спектральные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных разного типа. Научно-исследовательские работы, проведенные по спектральной теории, условно можно разделить на два направления. Первое из них — это доказательство теорем о единственности решения краевых задач для уравнений со спектральным параметром, а второе — нахождение собственных значений и собственных функций рассматриваемых краевых задач. Научные исследования по второму направлению в настоящее время интенсивно продолжаются и развиваются. Нахождению собственных значений и собственных функций краевых задач для различных уравнений эллиптических и смешанных типов на плоскости посвящено много исследований, среди которых следует отметить работы [1, 2] и др. Задачи такого типа для трехмерных эллиптических и смешанных уравнений также хорошо изучены, например, в работах [3–5].

Данная работа является продолжением работы [3], где изучена спектральная задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами.

Пусть Ω — трехмерная область, ограниченная частью сферы

$$S_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0, z > 0\}$$

и двумя полукругами

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 < 1, y = 0, z > 0\}, S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, y > 0, z = 0\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение эллиптического типа в виде

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z + \lambda u = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, y, z)$ — неизвестная функция, λ — числовой параметр, а $\beta, \gamma \in (0, 1/2)$.

Задача DN₂. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x, y, z) \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (1) в области Ω и краевому условию

$$u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_0, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_1, \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in S_2. \quad (4)$$

2. Исследование задачи DN_λ при $\lambda \leq 0$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $\lambda \leq 0$, то задача DN_λ имеет только тривиальное решение.

Доказательство. В области Ω справедливо тождество

$$\begin{aligned} & y^{2\beta} z^{2\gamma} u \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z + \lambda u \right) = \\ & = \left(y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_x \right)_x + \left(y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_y \right)_y + \left(y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_z \right)_z - y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - \lambda u^2) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируем это тождество по области $\Omega_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon \subset \Omega$, ограниченной при $z \geq \delta_1$, $y \geq \delta_2$ частью сферы

$$\tilde{S}_0 = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = (1 - \varepsilon)^2, \quad z \geq \delta_1, \quad y \geq \delta_2 \right\}$$

и при $z = \delta_1$, $y = \delta_2$ кругами

$$\tilde{S}_1 = \left\{ (x, y, z) : x^2 + z^2 < (1 - \varepsilon)^2, \quad y = \delta_2, \quad z \geq \delta_1 \right\},$$

$$\tilde{S}_2 = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 < (1 - \varepsilon)^2, \quad y \geq \delta_2, \quad z = \delta_1 \right\},$$

где ε , δ_1 и δ_2 — достаточно малые положительные числа. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \iiint_{pt\Omega_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon} \left[\left(y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_x \right)_x + \left(y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_y \right)_y + \left(y^{2\beta} z^{2\gamma} u u_z \right)_z \right] dx dy dz = \\ & = \iiint_{pt\Omega_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon} \left[y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - \lambda u^2) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского [6] к интегралу в левой стороне последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\tilde{S}_0} y^{2\beta} z^{2\gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_{\tilde{S}_1} \delta_2^{2\beta} z^{2\gamma} u(x, \delta_2, z) u_z(x, \delta_2, z) dx dz - \\ & - \iint_{\tilde{S}_2} y^{2\beta} \delta_1^{2\gamma} u(x, y, \delta_1) u_z(x, y, \delta_1) dx dy = \iiint_{pt\Omega_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon} \left[y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - \lambda u^2) \right] dx dy dz, \end{aligned} \quad (5)$$

где n — внешняя нормаль к $\tilde{S}_0$.

Отсюда, переходим к пределу при $\varepsilon, \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$. Тогда $\Omega_{\delta_1, \delta_2}^\varepsilon \rightarrow \Omega$ и учитывая краевые условия (2)–(4), а также $u, u_x, u_y, u_z \in C(\Omega)$, получаем

$$\iiint_{pt\Omega} \left[y^{2\beta} z^{2\gamma} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - \lambda u^2) \right] dx dy dz = 0.$$

В силу $\lambda \leq 0$, из этого равенства, следует, что $u_x \equiv u_y \equiv u_z \equiv 0$ в Ω . Следовательно, $u(x, y, z) \equiv \text{const}$, $(x, y, z) \in \Omega$. Так как $u \in C(\bar{\Omega})$ и $u(x, y, z)|_{\tilde{S}_0} = 0$, то $u(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

3. Исследование задачи DN_λ при $\lambda > 0$

В области Ω введем сферические координаты (r, θ, φ) , связанные с декартовыми координатами (x, y, z) по формулам

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, θ — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью z , а φ — угол между вектором $\overrightarrow{OM'}$ и осью x , где $O = O(0, 0, 0)$, $M = M(x, y, z)$, $M' = M'(x, y, 0)$.

В координатах (r, θ, φ) уравнение (1) принимает вид

$$u_{rr} + \frac{2(1+\beta+\gamma)}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \left[u_{\theta\theta} + [(1+2\beta)\operatorname{ctg}\theta - 2\gamma\operatorname{tg}\theta]u_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\theta}u_\varphi \right] + \lambda u = 0. \quad (6)$$

К уравнению (6), применим метод разделения переменных. Сначала, представим неизвестную функцию в виде $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Q(\theta, \varphi)$ и подставим в уравнение (6). Далее, вводя константу разделения переменных χ , получим два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} r^2 R''(r) + 2(1+\beta+\gamma)rR'(r) + (\lambda r^2 - \chi)R(r) &= 0, \quad 0 < r < 1; \\ Q_{\theta\theta} + [(1+2\beta)\operatorname{ctg}\theta - 2\gamma\operatorname{tg}\theta]Q_\theta + \\ + \frac{1}{\sin^2\theta}Q_{\varphi\varphi} + \frac{2\beta\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2\theta}Q_\varphi + \chi Q &= 0, \quad 0 < \theta < \pi/2, \quad 0 < \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь, полагая $Q(\theta, \varphi) = T(\theta)S(\varphi)$, из уравнения (7) получим

$$\frac{\sin^2\theta}{T(\theta)} [T''(\theta) + [(1+2\beta)\operatorname{ctg}\theta - 2\gamma\operatorname{tg}\theta]T'(\theta)] + \chi \sin^2\theta = -\frac{S''(\varphi) + 2\beta\operatorname{ctg}\varphi S'(\varphi)}{S(\varphi)}. \quad (8)$$

Вводя еще одну константу разделения переменных μ , из (8) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} S''(\varphi) + 2\beta\operatorname{ctg}\varphi S'(\varphi) + \mu S(\varphi) &= 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \\ \sin^2\theta \{ T''(\theta) + [(1+2\beta)\operatorname{ctg}\theta - 2\gamma\operatorname{tg}\theta]T'(\theta) \} + (\chi \sin^2\theta - \mu)T(\theta) &= 0, \quad 0 < \theta < \pi/2. \end{aligned}$$

Граничные условия (2) и условия $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, приводят к граничным условиям для функции $R(r)$: $R(1) = 0$ и $|R(0)| < +\infty$. Для фиксированных переменных r и φ , из условий (4) и $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega})$, получим условие для функции $T(\theta)$: $|T(0)| < +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\cos\theta)^{2\gamma} T'(\theta) = 0$. Из условий (3) для функции $S(\varphi)$ получим следующие условия $\lim_{\varphi \rightarrow 0} (\sin\varphi)^{2\beta} S'(\varphi) = 0$, $\lim_{\varphi \rightarrow \pi} (\sin\varphi)^{2\beta} S'(\varphi) = 0$.

В результате, исходная трехмерная задача распадается на три одномерные задачи на собственные значения:

$$\begin{aligned} r^2 R''(r) + 2(1+\beta+\gamma)rR'(r) + (\lambda r^2 - \chi)R(r) &= 0, \quad 0 < r < 1, \\ |R(0)| < +\infty, R(1) &= 0; \\ T''(\theta) + [(1+2\beta)\operatorname{ctg}\theta - 2\gamma\operatorname{tg}\theta]T'(\theta) + \left(\chi - \frac{\mu}{\sin^2\theta} \right)T(\theta) &= 0, \quad 0 < \theta < \pi/2, \\ |T(0)| < +\infty, \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} (\cos\theta)^{2\gamma} T'(\theta) &= 0; \\ S''(\varphi) + 2\beta\operatorname{ctg}\varphi S'(\varphi) + \mu S(\varphi) &= 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \\ \lim_{\varphi \rightarrow 0} (\sin\varphi)^{2\beta} S'(\varphi) = 0, \lim_{\varphi \rightarrow \pi} (\sin\varphi)^{2\beta} S'(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Исследование этих одномерных задач показало, что собственными значениями задачи DN_λ являются числа $\lambda_{ml} = \sigma_{ml}^2$, $m, l \in N$, а соответствующие собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} u_{nlm}(x, y, z) &= b_{nml} r^{-(1/2+\beta+\gamma)} J_{\nu_l}(\sigma_{ml}r) F\left(-n, n+2\beta; \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \times \\ &\times F_3\left(1/2 + \beta + \gamma + l, \beta + n/2, -l, -n/2, 1 + \beta; \sin^2 \theta, 1\right), \end{aligned}$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя [7], $F(\dots)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [8], $\nu_l = 2l + 1/2 + \beta + \gamma$, $l \in N$, σ_{ml} — нули функции $J_{\nu_l}(x)$, $F_3(a, a', b, b'; c; w, z)$, $(|w|, |z| < 1)$ — гипергеометрическая функция Аппеля [8], $b_{nml} \neq 0$ — произвольные постоянные,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg(y/x), \quad \theta = \arccos(z/r).$$

Замечание. Аналогичным способом можно изучить различные задачи для уравнения (1) в области Ω , задавая на различных плоскостях границы $\partial\Omega$, условия Дирихле и Неймана.

Литература

1. Салахитдинов, М. С. К спектральной теории уравнений смешанного типа / М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов. – Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. – 355 с.
2. Пономарев, С. М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Пономарев Сергей Михайлович; Москва, 1981.
3. Каримов, К.Т. Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами / К.Т. Каримов // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 18. – С. 7–19.
4. Urinov, A. K. The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients / A. K. Urinov, K. T. Karimov // Russian Mathematics. – 2019. – No 2. – P. 61–72.
5. Urinov, A. K. The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain / A. K. Urinov, K. T. Karimov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – № 9. – P. 1891–1902.
6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 656 с.
7. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций Т. 1. / Г. Н. Ватсон. – Москва : Изд. ИЛ., 1949. – 798 с.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Москва : Наука, 1973. – 296 с.

О ЗАДАЧЕ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

О. В. Чернова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Аннотация. Рассматривается задача Римана — Гильберта для эллиптической системы первого порядка в бесконечной области на плоскости. В работе сформулирован критерий фредгольмовой разрешимости задачи, когда матричные коэффициенты системы принадлежат весовому пространству Гельдера.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача Римана — Гильберта, индекс.

Пусть область $D \in \mathbb{C}$ бесконечна и ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, составленным из простых контуров Γ_i , $i = 1, \dots, m$. В этой области рассмотрим эллиптическую систему первого порядка

$$U_y - AU_x + aU + b\bar{U} = F, \quad (1)$$

где матрица $A \in \mathbb{C}^{l \times l}$ не имеет вещественных собственных значений и $l \times l$ -матричные коэффициенты a, b принадлежат весовому пространству Гельдера $C_{\delta_0}^\mu(\bar{D}, \infty)$, $\delta_0 < -1$, определенному в [1].

Пусть $\sigma_1(\sigma_2)$ — множество собственных значений матрицы $A(\bar{A})$, лежащих в верхней полуплоскости и $l_1(l_2)$ — число этих значений, взятое с учетом кратности, так что $l = l_1 + l_2$. Тогда существуют такие матрицы $B_k \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$, $k = 1, 2$, и жордановы матрицы $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$ с собственными значениями $\nu \in \sigma_k$, что $AB_k = B_k J_k$ и $\det(B_1, B_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2) \neq 0$.

Исходя из заданной $l \times l$ -матрицы-функции $C(t) \in C^\mu(\Gamma)$, $\mu < \nu$ для системы (1) рассмотрим краевую задачу Римана — Гильберта

$$\operatorname{Re} CU^+ \Big|_\Gamma = f, \quad (2)$$

где $+$ означает граничное значение функции U на Γ . Эту задачу естественно рассматривать в классе функций $U \in C^1(D) \cap C_{\delta}^\mu(\bar{D}, \infty)$, для которых $U_y - AU_x \in C_{\delta-1}^\mu(\bar{D}, \infty)$ с некоторым $-1 < \delta < 0$.

Теорема. Условие обратимости матрицы-функции $G = (CB_1, \bar{C}\bar{B}_2)$ необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1), (2) и ее индекс дается формулой

$$\varkappa = -2\operatorname{Ind} G - ml,$$

где $\operatorname{Ind} G$ есть индекс Коши матрицы-функции G на контуре Γ , который ориентирован положительно по отношению к области D .

Литература

1. Солдатов, А. П. Задача Римана — Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами / А. П. Солдатов, О. В. Чернова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2018. — Т. 149. — С. 95–102.

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Н. Шевченко, А. Ю. Борисенко

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Аннотация. В статье изучается разрешимость третьей краевой задачи для модельного линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа в единичном квадрате для случая разрывных условий сопряжения на характеристиках этого уравнения. При решении поставленной третьей краевой задачи используется известное решение Даламбера для этого гиперболического уравнения. В работе выясняются условия однозначной разрешимости сформулированной задачи. В результате получено точное решение исходной задачи в явном виде.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, третья краевая задача, характеристики, условия сопряжения.

Для дифференциального уравнения с частными производными гиперболического типа задача Дирихле в прямоугольнике с непрерывными условиями сопряжения на характеристиках рассматривалась в работе М. М. Хачева [1], с разрывными условиями сопряжения на характеристиках — в работах [2–5]. Задача Неймана для гиперболических дифференциальных уравнений с частными производными изучалась в работах [6–8]. Предлагаемая работа является продолжением исследований в этом направлении, когда для гиперболического дифференциального уравнения второго порядка на всей границе рассматриваемой области задается краевое условие третьего рода, которое обобщает условие задач Дирихле и Неймана.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

в квадрате с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$. Введем обозначения

$$D_1 = \{(x; y) : y < x, y < 1 - x, y > 0\}, D_2 = \{(x; y) : y < x, y > 1 - x, x < 1\},$$

$$D_3 = \{(x; y) : y > x, y > 1 - x, y < 1\}, D_4 = \{(x; y) : y > x, y < 1 - x, x > 0\}, D = \bigcup_{i=1}^4 D_i.$$

Третья краевая задача. Найти функцию $U(x; y)$ непрерывную в замкнутых областях $\overline{D}_i, i = 1, 4$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x; y)$ — дважды непрерывно дифференцируемое в D решение уравнения (1),
- 2) $u(x; y)$ удовлетворяет краевым условиям третьего рода:

$$\left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + \alpha_1(x) u(x; y) \right]_{y=0} = v_1(x), 0 \leq x \leq 1, \left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + \alpha_2(y) u(x; y) \right]_{x=1} = v_2(x), 0 \leq y \leq 1,$$

$$\left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + \alpha_3(x) u(x; y) \right]_{y=1} = v_3(x), 0 \leq x \leq 1, \left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + \alpha_4(y) u(x; y) \right]_{x=0} = v_4(x), 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

где известные функции $\alpha_i, v_i \in C[0;1] \cap C^1(0;1)$, $i = \overline{1,4}$,

- 3) $u(x; y)$ удовлетворяет на характеристиках уравнения (1) $x - y = 0$ и $x + y = 1$ условиям сопряжения:

$$\lim_{y \rightarrow x+0} u(x; y) = a_1(x) \cdot \lim_{y \rightarrow x-0} u(x; y) + b_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 1-x-0} u(x; y) &= a_2(x) \cdot \lim_{y \rightarrow 1-x+0} u(x; y) + b_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\
\lim_{y \rightarrow x-0} u(x; y) &= a_3(x) \cdot \lim_{y \rightarrow x+0} u(x; y) + b_3(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\
\lim_{y \rightarrow 1-x+0} u(x; y) &= a_4(x) \cdot \lim_{y \rightarrow 1-x-0} u(x; y) + b_4(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Заданные функции $a_1(x)$, $a_4(x)$, $b_1(x)$, $b_4(x)$ принадлежат классу $C[0, 1/2] \cap C^2(0, 1/2)$, а функции $a_2(x)$, $a_3(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$ из класса $C[1/2, 1] \cap C^2(1/2, 1)$.

Известно, что общее решение уравнения (1), которое называют решением Даламбера, имеет вид:

$$u(x; y) = Q_1(x - y) + Q_2(x + y), \tag{4}$$

где Q_1 и Q_2 — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Найдем в области D_1 решение краевой задачи для уравнения (1) с условиями:

$$u(x; y)|_{y=0} = \tau_1(x), \left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + \alpha_1(x) \cdot u(x; y) \right]_{y=0} = \nu_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где заданные функции $\tau_1(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\nu_1(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$.

Подставим решение Даламбера (4) в краевые условия (5):

$$\begin{cases} Q_1(x) + Q_2(x) = \tau_1(x) \\ -Q_1'(x) + Q_2'(x) + \alpha_1(x)\tau_1(x) = \nu_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Получим систему двух уравнений, одно из которых дифференциальное, относительно неизвестных функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Обе части второго уравнения системы (6) интегрируем по промежутку $[0; x]$, где $x \in [0; 1]$:

$$\begin{cases} Q_1(x) + Q_2(x) = \tau_1(x) \\ -Q_1(x) + Q_2(x) = \int_0^x \nu_1(t) dt - \int_0^x \alpha_1(t) \tau_1(t) dt - Q_1(0) + Q_2(0). \end{cases}$$

Откуда находим

$$\begin{cases} Q_1(x) = \frac{1}{2} \left[\tau_1(x) - \int_0^x \nu_1(t) dt + \int_0^x \alpha_1(t) \tau_1(t) dt + Q_1(0) - Q_2(0) \right] \\ Q_2(x) = \frac{1}{2} \left[\tau_1(x) + \int_0^x \nu_1(t) dt - \int_0^x \alpha_1(t) \tau_1(t) dt - Q_1(0) + Q_2(0) \right] \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя формулы (7) в общее решение (4), получим решение задачи (1), (5)

$$u_1(x; y) = \frac{1}{2} \left[\tau_1(x - y) + \tau_1(x + y) + \int_{x-y}^{x+y} \nu_1(t) dt - \int_{x-y}^{x+y} \alpha_1(t) \tau_1(t) dt \right]. \tag{8}$$

В области D_2 также находим решение краевой задачи для уравнения (1) с условиями

$$u(x; y)|_{x=1} = \tau_2(y), \left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + \alpha_2(y) u(x; y) \right]_{x=1} = \nu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где заданные функции $\tau_2(y) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\nu_2(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$,

$$u_2(x; y) = \frac{1}{2} \left[\tau_2(1 - x + y) + \tau_2(x + y - 1) - \int_{x+y-1}^{1-x+y} \nu_2(t) dt + \int_{x+y-1}^{1-x+y} \alpha_2(t) \tau_2(t) dt \right]. \tag{9}$$

Аналогично в области D_3 находим решение для уравнения (1) задачи с краевыми условиями:

$$u(x; y)|_{y=1} = \tau_3(x), \left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + \alpha_3(x)u(x; y) \right]_{y=1} = \nu_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где заданные функции $\tau_3(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\nu_3(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, которое имеет вид

$$u_3(x; y) = \frac{1}{2} \left[\tau_3(x - y + 1) + \tau_3(x + y - 1) - \int_{x+y-1}^{x-y+1} \nu_3(t) dt + \int_{x+y-1}^{x-y+1} \alpha_3(t) \tau_3(t) dt \right]. \quad (10)$$

Также в области D_4 найдем решение краевой задачи для уравнения (1) с условиями:

$$u(x; y)|_{x=0} = \tau_4(y), \left[\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + \alpha_4(y)u(x; y) \right]_{x=0} = \nu_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где заданные функции $\tau_4(y) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\nu_4(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$.

Запишем это решение

$$u_4(x; y) = \frac{1}{2} \left[\tau_4(-x + y) + \tau_4(x + y) + \int_{-x+y}^{x+y} \nu_4(t) dt - \int_{-x+y}^{x+y} \alpha_4(t) \tau_4(t) dt \right]. \quad (11)$$

Используя условия сопряжения (3) и решения (8)–(11), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\tau_4(0) + \tau_4(2x) + \int_0^{2x} \nu_4(t) dt - \int_0^{2x} \alpha_4(t) \tau_4(t) dt \right] = \\ & = a_1(x) \cdot \frac{1}{2} \left[\tau_1(0) + \tau_1(2x) + \int_0^{2x} \nu_1(t) dt - \int_0^{2x} \alpha_1(t) \tau_1(t) dt \right] + b_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ & \frac{1}{2} \left[\tau_1(2x-1) + \tau_1(1) + \int_{2x-1}^1 \nu_1(t) dt - \int_{2x-1}^1 \alpha_1(t) \tau_1(t) dt \right] = \\ & = a_2(x) \cdot \frac{1}{2} \left[\tau_2(2-2x) + \tau_2(0) - \int_0^{2-2x} \nu_2(t) dt + \int_0^{2-2x} \alpha_2(t) \tau_2(t) dt \right] + b_2(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ & \frac{1}{2} \left[\tau_2(1) + \tau_2(2x-1) - \int_{2x-1}^1 \nu_2(t) dt + \int_{2x-1}^1 \alpha_2(t) \tau_2(t) dt \right] = \\ & = a_3(x) \cdot \frac{1}{2} \left[\tau_3(1) + \tau_3(2x-1) - \int_{2x-1}^1 \nu_3(t) dt + \int_{2x-1}^1 \alpha_3(t) \tau_3(t) dt \right] + b_3(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ & \frac{1}{2} \left[\tau_3(2x) + \tau_3(0) - \int_0^{2x} \nu_3(t) dt + \int_0^{2x} \alpha_3(t) \tau_3(t) dt \right] = \\ & = a_4(x) \cdot \frac{1}{2} \left[\tau_4(1-2x) + \tau_4(1) + \int_{1-2x}^1 \nu_4(t) dt - \int_{1-2x}^1 \alpha_4(t) \tau_4(t) dt \right] + b_4(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

систему четырех интегральных уравнений относительно неизвестных функций τ_i , $i = \overline{1, 4}$.

Обе части интегральных уравнений полученной системы продифференцируем по x , положив для упрощения $a_i(x) = a_i - \text{const}$,

$$\begin{aligned} & [\tau_4'(2x) - a_1 \tau_1'(2x)] - [\alpha_4(2x) \cdot \tau_4(2x) - a_1 \alpha_1(2x) \cdot \tau_1(2x)] = \\ & = b_1'(x) + a_1 \nu_1(2x) - \nu_4(2x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\tau_1'(2x-1) + a_2\tau_2'(2-2x)] + [\alpha_1(2x-1) \cdot \tau_1(2x-1) + a_2\alpha_2(2-2x) \cdot \tau_2(2-2x)] = \\
& = b_2'(x) + a_2\nu_2(2-2x) + \nu_1(2x-1), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\
& [\tau_2'(2x-1) - a_3\tau_3'(2x-1)] - [\alpha_2(2x-1) \cdot \tau_2(2x-1) - a_3\alpha_3(2x-1) \cdot \tau_3(2x-1)] = \\
& = b_3'(x) + a_3\nu_3(2x-1) - \nu_2(2x-1), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\
& [\tau_3'(2x) + a_4\tau_4'(1-2x)] + [\alpha_3(2x) \cdot \tau_3(2x) + a_4\alpha_4(1-2x) \cdot \tau_4(1-2x)] = \\
& = b_4'(x) + a_4\nu_4(1-2x) + \nu_3(2x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

В полученной системе дифференциальных уравнений положим, что $\alpha_2(t) = -\alpha_1(1-t)$, $\alpha_3(t) = -\alpha_1(1-t)$, $\alpha_4(t) = \alpha_1(t) \quad \forall t \in [0;1]$, тогда она примет вид

$$\frac{1}{2}[\tau_4(2x) - a_1\tau_1(2x)]' - \alpha_1(2x)[\tau_4(2x) - a_1\tau_1(2x)] = b_1'(x) + a_1\nu_1(2x) - \nu_4(2x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[\tau_1(2x-1) - a_2\tau_2(2-2x)]' + \alpha_1(2x-1)[\tau_1(2x-1) - a_2\tau_2(2-2x)] = \\
& = b_2'(x) + a_2\nu_2(2-2x) + \nu_1(2x-1), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[\tau_2(2x-1) - a_3\tau_3(2x-1)]' + \alpha_1(2-2x)[\tau_2(2x-1) - a_3\tau_3(2x-1)] = \\
& = b_3'(x) + a_3\nu_3(2x-1) - \nu_2(2x-1), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[\tau_3(2x) - a_4\tau_4(1-2x)]' - \alpha_1(1-2x)[\tau_3(2x) - a_4\tau_4(1-2x)] = \\
& = b_4'(x) + a_4\nu_4(1-2x) + \nu_3(2x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Решая данную систему четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка, получаем

$$\begin{cases} \tau_4(2x) - a_1\tau_1(2x) = \varphi_1(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \tau_1(2x-1) - a_2\tau_2(2-2x) = \varphi_2(x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \tau_2(2x-1) - a_3\tau_3(2x-1) = \varphi_3(x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \tau_3(2x) - a_4\tau_4(1-2x) = \varphi_4(x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\varphi_1(x) = \exp\left[2\int_0^x \alpha_1(2\xi)d\xi\right] \cdot \left\{2\int_0^x [b_1'(\xi) + a_1\nu_1(2\xi) - \nu_4(2\xi)] \cdot \exp\left[-2\int_0^\xi \alpha_1(2\eta)d\eta\right] d\xi + C_1\right\},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \exp \left[-2 \int_{\frac{1}{2}}^x \alpha_1(2\xi - 1) d\xi \right] \times \\
&\times \left\{ 2 \int_{\frac{1}{2}}^x [b'_2(\xi) + a_2 v_2(2 - 2\xi) + v_1(2\xi - 1)] \cdot \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \alpha_1(2\eta - 1) d\eta \right] d\xi + C_2 \right\}, \\
\varphi_3(x) &= \exp \left[-2 \int_{\frac{1}{2}}^x \alpha_1(2 - 2\xi) d\xi \right] \times \\
&\times \left\{ 2 \int_{\frac{1}{2}}^x [b'_3(\xi) + a_3 v_3(2\xi - 1) - v_2(2\xi - 1)] \cdot \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \alpha_1(2 - 2\eta) d\eta \right] d\xi + C_3 \right\}, \\
\varphi_4(x) &= \exp \left[2 \int_0^x \alpha_1(1 - 2\xi) d\xi \right] \times \\
&\times \left\{ 2 \int_0^x [b'_4(\xi) + a_4 v_4(1 - 2\xi) + v_3(2\xi)] \cdot \exp \left[-2 \int_0^{\xi} \alpha_1(1 - 2\eta) d\eta \right] d\xi + C_4 \right\},
\end{aligned}$$

C_i — произвольные постоянные величины, $i = \overline{1, 4}$, систему четырех функциональных уравнений относительно τ_i .

Для нахождения постоянных величин C_i положим в первом и четвертом уравнениях системы (12) $x = 0$, а во втором и третьем $x = \frac{1}{2}$.

$$\{\tau_4(0) - a_1\tau_1(0) = C_1, \quad \tau_1(0) - a_2\tau_2(1) = C_2, \quad \tau_2(0) - a_3\tau_3(0) = C_3, \quad \tau_3(0) - a_4\tau_4(1) = C_4\} \quad (13)$$

Если в первом соотношении условий сопряжения (3) положить $x = 0$, получим

$$u_4(0, 0) = a_1(0)u_1(0; 0) + b_1(0),$$

то есть

$$\tau_4(0) - a_1\tau_1(0) = b_1(0). \quad (14)$$

Сравнивая (14) с первым уравнением системы (13), получаем, что $C_1 = b_1(0)$.

Во втором соотношении условий сопряжения (3) положим $x = 1$, получим $u_1(1; 0) = a_2(1)u_2(1; 0) + b_2(1)$ или $\tau_1(1) = a_2\tau_2(0) + b_2(1)$. Откуда

$$\tau_1(1) - a_2\tau_2(0) = b_2(1). \quad (15)$$

При $x = 1$ второе уравнение системы (12) принимает вид

$$\begin{aligned}
\tau_1(1) - a_2\tau_2(0) &= \exp \left[-2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \alpha_1(2\xi - 1) d\xi \right] \times \\
&\times \left\{ 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 [b'_2(\xi) + a_2 v_2(2 - 2\xi) + v_1(2\xi - 1)] \cdot \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \alpha_1(2\eta - 1) d\eta \right] d\xi + C_2 \right\}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) и (16) находим, что

$$C_2 = b_2(1) \cdot \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \alpha_1(2\xi - 1) d\xi \right] - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 [b'_2(\xi) + a_2 v_2(2 - 2\xi) + v_1(2\xi - 1)] \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \alpha_1(2\eta - 1) \cdot d\eta \right] d\xi.$$

В третьем условии сопряжения (3) поставим $x = 1$ $u_2(1; 1) = a_3(1)u_3(1; 1) + b_3(1)$ или $\tau_2(1) = a_3\tau_3(1) + b_3(1)$. Тогда

$$\tau_2(1) - a_3\tau_3(1) = b_3(1). \quad (17)$$

Положив в третьем уравнении системы (12) $x = 1$, получим

$$\begin{aligned} \tau_2(1) - a_3\tau_3(1) = \exp \left[-2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \alpha_1(2 - 2\xi) d\xi \right] \times \\ \times \left\{ 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 [b'_3(\xi) + a_3 v_3(2\xi - 1) - v_2(2\xi - 1)] \cdot \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \alpha_1(2 - 2\eta) d\eta \right] d\xi + C_3 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (17) и (18) имеем

$$C_3 = b_3(1) \cdot \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \alpha_1(2 - 2\xi) d\xi \right] - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 [b'_3(\xi) + a_3 v_3(2\xi - 1) - v_2(2\xi - 1)] \exp \left[2 \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \alpha_1(2 - 2\eta) \cdot d\eta \right] d\xi.$$

Если в четвертом условии сопряжения (3) положить $x = 0$, то получим $u_3(0; 1) = a_4(0)u_4(0; 1) + b_4(0)$ или $\tau_3(0) = a_4\tau_4(1) + b_4(0)$. То есть

$$\tau_3(0) - a_4\tau_4(1) = b_4(0). \quad (19)$$

Найдем вид четвертого уравнения системы (12) при $x = 0$:

$$\tau_3(0) - a_4\tau_4(1) = C_4. \quad (20)$$

Из равенств (19) и (20) следует, что $C_4 = b_4(0)$.

Таким образом, все постоянные величины C_i найдены. Приступим к решению системы функциональных уравнений (12).

Из первого уравнения этой системы находим

$$\tau_4(t) = a_1\tau_1(t) + \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (21)$$

и подставляем в четвертое уравнение

$$\tau_3(t) = a_4 \left[a_1\tau_1(1-t) + \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) \right] + \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (22)$$

Подставляя (22) в третье уравнение системы (12), получим

$$\tau_2(t) = a_3 \left\{ a_4 \left[a_1\tau_1(1-t) + \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) \right] + \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) \right\} + \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (23)$$

Из второго уравнения системы (12) и равенства (23)

$$\tau_1(t) = a_2 \cdot a_3 \left\{ a_4 \left[a_1\tau_1(t) + \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) \right] + \varphi_4\left(\frac{1-t}{2}\right) \right\} + a_2 \cdot \varphi_3\left(\frac{2-t}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{1+t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Откуда

$$\tau_1(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times \\ \times \left[a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) + a_2 \cdot a_3 \cdot \varphi_4\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_2 \cdot \varphi_3\left(\frac{2-t}{2}\right) + \varphi_2\left(\frac{1+t}{2}\right) \right], 0 \leq t \leq 1, \quad (24)$$

где $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \neq 1$.

Следует отметить, что это ограничение исключает возможность, при постановке третьей краевой задачи, использования непрерывных условий сопряжения одновременно на всех характеристиках $x - y = 0$ и $x + y = 1$ уравнения (1).

Формулу (24) подставляем в равенства (21), (22), (23)

$$\tau_4(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times \\ \times \left[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \varphi_4\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot \varphi_3\left(\frac{2-t}{2}\right) + a_1 \cdot \varphi_2\left(\frac{1+t}{2}\right) \right] + \varphi_1\left(\frac{t}{2}\right), \quad (25)$$

$$\tau_3(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times \\ \times \left[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4^2 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right) + a_1 \cdot a_4 \cdot \varphi_2\left(\frac{2-t}{2}\right) \right] + \\ + a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right), \quad (26)$$

$$\tau_2(t) = (1 - a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{-1} \times \\ \times \left[a_1 \cdot a_2 \cdot a_3^2 \cdot a_4^2 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3^2 \cdot a_4 \cdot \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right) + \right. \\ \left. + a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_2\left(\frac{2-t}{2}\right) + a_3 \cdot a_4 \cdot \varphi_1\left(\frac{1-t}{2}\right) \right] + a_3 \cdot \varphi_4\left(\frac{t}{2}\right) + \varphi_3\left(\frac{1+t}{2}\right), 0 \leq t \leq 1 \quad (27)$$

Подставив найденные по формулам (24)–(27) функции $\tau_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$ в (8)–(11), получим единственное решение задачи (1)–(3) в следующем виде:

$$u(x; y) = \begin{cases} u_1(x; y), (x; y) \in D_1 \\ u_2(x; y), (x; y) \in D_2 \\ u_3(x; y), (x; y) \in D_3 \\ u_4(x; y), (x; y) \in D_4. \end{cases}$$

Литература

1. Хачев М. М. Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 1. – С. 151–160.
2. Шевченко Г. Н. О разрешимости задачи Дирихле для гиперболического уравнения, вырождающегося на всей границе области // Сборник научных трудов SWorld по материалам Международной научно – практической конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития 2012». – Выпуск 3, Т. 2 – Одесса : Купrienko, 2012. – С. 87–89.
3. Абдурахманова Н. С., Шевченко Г. Н. Первая краевая задача для гиперболического уравнения, вырождающегося на всей границе области // «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем». Сборник статей VII Международной научно-технической конференции. – Пенза, 2012. – С. 17–20.

4. Шевченко Г. Н. Первая краевая задача для одного гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Наука и мир. Международный научный журнал. – 2017. – Т. 1, №15(45). – С. 19–22.
5. Шевченко Г. Н. Задача Дирихле для гиперболического уравнения в квадрате с разрывными условиями сопряжения на характеристиках // Аллея науки. – 2018. – Т. 2, №5(21). – С. 401–404.
6. Шевченко Г. Н. О разрешимости задачи Неймана для гиперболического уравнения, вырождающегося на всей границе области // Сборник научных трудов SWorld. – Выпуск 3(36), Т. 27 – Одесса: Куприенко С. В., 2014. – С. 74–76.
7. Шевченко Г. Н. Вторая краевая задача для вырождающегося гиперболического уравнения // Наука и мир. Международный научный журнал. – 2014. – Т. 1, №12(16). – С. 26–29.
8. Борисенко А. Ю., Шевченко Г. Н. Задача Неймана для гиперболического уравнения в квадрате с разрывными условиями сопряжения на характеристиках // Наука и мир. Международный научный журнал. – 2019. – Т. 1, №5(69). – С.14–17.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КВАДРАТИЧНО СУММИРУЕМЫМ ЯДРОМ

А. Н. Шелковой

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства интегро-дифференциального оператора второго порядка с интегрируемым с квадратом ядром. Получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора.

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

1. Введение

Пусть $L_2[0,1]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x, y) = \int_0^1 x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau$. Через $W_2^2[0,1]$ обозначим пространство Соболева

$$\{x \in L_2[0,1] : x' \text{ абсолютно непрерывна, } x'' \in L_2[0,1]\}.$$

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1],$$

задаваемый выражением вида

$$(Lx)(t) = -\ddot{x}(t) - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \quad (1)$$

с ядром $K \in L_2([0,1]^2)$, с областью определения $D(L) = \{x \in W_2^2[0,1], x(0) = x(1) = 0\}$ и краевыми условиями

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (2)$$

В данной статье также рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1],$$

порождаемый интегро-дифференциальным выражением вида

$$(Lx)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \quad (3)$$

и краевыми условиями (2).

Такого класса оператор возникает при переходе к сопряженному при исследовании оператора, действующего в $L_2[0,1]$, задаваемого выражением

$$(Ly)(t) = -\ddot{y}(t) - \int_0^1 K(t,s)y(s)ds$$

и нелокальными краевыми условиями:

$$\begin{cases} y(0) = \int_0^1 a_0(t)y(t)dt, \\ y(1) = \int_0^1 a_1(t)y(t)dt. \end{cases}$$

Здесь a_0 и a_1 — функции из $L_2[0,1]$, $K \in L_2([0,1]^2)$.

Для исследования спектра оператора L рассмотрим сопряженный ему оператор L^* (см. [5]), который задается дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

В настоящей статье для исследования спектральных свойств рассматриваемого класса применяется вариант метода подобных операторов, позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений рассматриваемых операторов.

Приведем основные определения и теоремы метода подобных операторов.

Пусть H — бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 1. Два оператора $A_i : D(A_i) \subset H \rightarrow H$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } H$ (т. е. $U^{-1} \in \text{End } H$, $\text{End } H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H), такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и выполняется равенство $A_1 Ux = UA_2 x$, $x \in D(A_2)$. U называется оператором преобразования подобия оператора A_1 в A_2 .

Определение 2. Линейный оператор $C : D(C) \subset H \rightarrow H$ называется подчиненным оператору $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, если выполнены следующие два условия:

- 1) $D(C) \supseteq D(A)$;
- 2) существует постоянная $M > 0$, такая, что

$$\|Cx\| \leq M(\|Ax\| + \|x\|) \quad \forall x \in D(A).$$

Определение 3. Тройка $(\mathcal{U}, J, \Gamma)$, $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $\Gamma : \mathcal{U} \rightarrow \text{End } H$, называется допустимой для оператора A , а $\mathcal{U}$ — допустимым пространством возмущений, если:

1) $\mathcal{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в банахово пространство $L_A(H)$ линейных операторов, подчиненных оператору A ;

2) J, Γ — трансформаторы (т. е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);

- 3) $(\Gamma X)x \in D(A) \quad \forall x \in D(A)$ и имеет место равенство:

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX, X \in \mathcal{U},$$

(равенство понимается как равенство элементов из $\mathcal{U}$);

4) $X\Gamma Y$, $(\Gamma Y)X \in \mathcal{U}$, $X, Y \in \mathcal{U}$, и существуют постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, такие, что $\|\Gamma\| \leq \gamma_1$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \leq \gamma_2 \|X\|_* \|Y\|_*$;

- 5) выполнены условия:

а) $\text{Im } \Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in \text{End } H$ или

б) $\forall X \in \mathcal{U}$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует число $\nu_\varepsilon \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A), такое, что $\|XR(\nu_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon$, где $\|X\|_\infty = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Xx\|$ — норма оператора в $\text{End } H$; $R(\nu_\varepsilon, A) = (A - \nu_\varepsilon I)^{-1}$.

Здесь $\text{Im } \Gamma X$ — образ оператора ΓX . Непрерывность вложения банахова пространства $\mathcal{U}$ в $L_A(H)$ означает, что существует постоянная $M_0 > 0$, такая, что $\|B\|_A \leq M_0 \|B\|_* \quad \forall B \in \mathcal{U}$. Пусть $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ — нормальный оператор (см., например, [14]) (частный случай нормально-самосопряженный оператор), т. е. $D(A) = D(A^*)$, $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $x \in D(A)$, спектр которого представим в виде:

$$\sigma(A) = \bigcup_{j \geq 1} \sigma_j, \quad 0 \notin \sigma(A),$$

где σ_j , $j \geq 1$, — взаимно непересекающиеся компактные множества, такие, что

$$\text{dist}(0, \sigma_1) < \text{dist}(0, \sigma_2) < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(0, \sigma_n) = \infty.$$

Пусть P_j , $j \geq 1$, — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_j , $A_j = AP_j$, $j = 1, 2, \dots$, $A_j \in \text{End } H$, $|\sigma_j| = \sup_{\lambda \in \sigma_j} |\lambda|$. В качестве пространства возмущений $\mathcal{U}$ рассматриваются операторы $B: D(A) \subset H \rightarrow H$, допускающие представление

$$B = B_0 A, \quad B_0 \in \sigma_2(H)$$

(здесь $\sigma_2(H)$ — идеал операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H , с нормой $\|\cdot\|_2$), причем существуют две ненулевые последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $\{\beta_j\}_1^\infty$, такие, что имеет место оценка:

$$\|P_j B_0 P_i\| \leq c \cdot \alpha_j \cdot \beta_i, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

для некоторой постоянной $c > 0$.

Наименьшая из констант, удовлетворяющих этому неравенству, определяет норму в $\mathcal{U}$. Пусть n — некоторое натуральное число, положим $\Delta_n = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k$, $P(\Delta_n, A)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_n .

Положим $Q_1 = Q_{1n} = P(\Delta_n, A) = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, $Q_2 = Q_{2n} = I - Q_{1n}$. Трансформаторы $J_n: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ и $\Gamma_n: \mathcal{U} \rightarrow \sigma_2(H)$, $n \geq 1$, определяются следующим образом:

$$J_n X = Q_1 X Q_1 + Q_2 X Q_2,$$

$$\Gamma_n X = \Gamma_n^{(1)} X + \Gamma_n^{(2)} X,$$

где

$$\Gamma_n^{(1)} X = \sum_{m \geq n+1} \sum_{k=1}^n \Gamma_n(P_m X_0 A P_k), \quad \Gamma_n^{(2)} X = \sum_{m=1}^n \sum_{k \geq n+1} \Gamma_n(P_m X_0 A P_k).$$

На операторных блоках $P_m X_0 P_k A$ трансформатор Γ_n определяется как решение уравнения

$$A P_m Y_{0mk} - Y_{0mk} A P_k = P_m X_0 P_k,$$

удовлетворяющее условию

$$P_m Y_{0mk} P_k = Y_{0mk},$$

где $k \geq n+1$, $m \leq n$ либо $k \leq n$, $m \geq n+1$. Для всех остальных значений m и k полагается $\Gamma_n(P_m X_0 P_k A) = 0$.

Теорема 1. Пусть n — натуральное число, такое, что

$$\gamma_1(n) = \sum_{m=1}^n \sum_{k \geq n+1} \frac{|\sigma_k|^2 \beta_k^2 \alpha_m^2 + \beta_m^2 \alpha_k^2 |\sigma_m|^2}{(\text{dist}(\sigma_m, \sigma_k))^2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max \left\{ \max_{j \leq n} \left\{ \sum_{k \geq n+1} \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{\text{dist}(\sigma_j, \sigma_k)} \right\}, \sup_{j \geq n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{|\sigma_k| \alpha_k \beta_k}{\text{dist}(\sigma_j, \sigma_k)} \right\} \right\} < \infty,$$

причем выполнено условие

$$2 \max \{ \gamma_1(n), \gamma_2(n) \} + \gamma_1(n) + \gamma_2(n) < 1,$$

тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, где $X^*(n) \in \mathcal{U}$ имеет вид:

$$X^*(n) = X_{11}^*(n) + X_{12}^*(n) + X_{21}^*(n) + X_{22}^*(n), \quad (5)$$

где $X_{ij}^*(n) = Q_i X^*(n) Q_j$, $i, j = 1, 2$, есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} X_{ii} = B_{ij} \Gamma X_{ji} + B_{ii}, & (i=1, j=2) \vee (i=2, j=1); \\ X_{ij} = F_{ij}(X_{ij}), \end{cases}$$

где оператор $F_{ij}: \mathcal{U}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_{ij}$ задается формулой

$$F_{ij}(X) = B_{ii} \Gamma X - (\Gamma X) B_{jj} - (\Gamma X)(B_{ji} \Gamma X) + B_{ij},$$

$B_{ij} = Q_i B Q_j$, $i, j = 1, 2$, — блоки оператора $B \in \mathcal{U}$, являющегося возмущением оператора A , допустимое пространство возмущений $\mathcal{U}$ является прямой суммой четырех замкнутых подпространств вида

$$\mathcal{U}_{ij} = \{Q_i X Q_j, X \in \mathcal{U}\}, \quad i, j = 1, 2.$$

Оператор преобразования подобия имеет вид $I + \Gamma_n X^*(n)$.

Теорема 2. Пусть операторы A и $B \in \mathcal{U}$ таковы, что $\gamma_1(n) \rightarrow 0$, $\gamma_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, начиная с некоторого n_0 , оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, $n \geq n_0$, где $X^*(n)$ представимо в виде (5) и $\|P(\Delta_n, A) - P(\tilde{\Delta}_n, A - B)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем

$$\tilde{\Delta}_n = \sigma((A - J_n X^*(n)) P(\Delta_n, A) H) \subset \sigma(A - B),$$

где $P(\tilde{\Delta}_n, A - B)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\tilde{\Delta}_n$ оператора $A - B$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда

$$\left\| (I - P(\tilde{\Delta}_n, A - B))x - \sum_{i \geq n+1} P_i X \right\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

для любого фиксированного $x \in H$.

2. Основные результаты

Перейдем к исследованию спектральных свойств оператора $L : D(L) \subset L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, задаваемого выражением (1). Методом исследования оператора L является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1–20]. Представим его в виде $Lx = Ax - Bx$, где A порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x}$,

$$D(A) = \{x \in L_2[0, 1] : x, \dot{x} \in C[0, 1], \ddot{x} \in L_2[0, 1], \\ x(0) = 0, x(1) = 0\},$$

с краевыми условиями (2) и

$$(Bx)(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds, \quad t \in [0, 1], \quad x \in D(A). \quad (6)$$

Оператор A будем считать невозмущенным оператором, B — возмущением, которое представляет собой интегральный оператор с ядром $K \in L_2([0, 1]^2)$. Рассматриваемый оператор A — самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром, который имеет простые собственные значения $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, а собственные функции, отвечающие этим собственным значениям, $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$, $n \geq 1$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$ (см., например, [1]). Положим $\Delta_1(n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $P_n = P(\Delta_1(n), A)$, $P_j = P(\lambda_j, A)$ — проектор Рисса, $j = 1, 2, \dots$.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $Lx = Ax - Bx$, мы получим следующие результаты.

Теорема 3. Оператор $B : D(A) \subset L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, задаваемый соотношением (6), представим в виде

$$B = B_0 A,$$

где $B_0 \in \sigma_2(L_2[0, 1])$ ($\sigma_2(L_2[0, 1])$ — идеал операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве $L_2[0, 1]$), и

$$\|P_i B_0 P_j\| \leq \alpha_i \beta_j, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

где P_i — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\sigma_i = \{\pi^2 i^2\}$, $(P_i x = (x, e_i)e_i, (\cdot, \cdot))$ — скалярное произведение в $L_2[0, 1]$,

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \sup_j \frac{|K_{ij}^{\sin}|}{j}, \quad K_{ij}^{\sin} = \int_0^1 \int_0^1 K(t,s) \sin \pi j t \sin \pi i s dt ds,$$

$$\beta_j = \frac{1}{\pi^2 j}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Теорема 4. Пусть для любых функций $K \in L_2([0,1]^2)$ для последовательностей величин γ_1 и γ_2 , определенных формулами

$$\gamma_1(n) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{n^2 \left(\sup_j \frac{|K_{mj}^{\sin}|}{j} \right)^2 + m^2 \left(\sup_j \frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j} \right)^2}{|n^2 - m^2|^2} \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \frac{1}{2\pi^2} \max \left\{ \frac{n \sup_j \frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j}}{2n-1}, \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{m \sup_j \frac{|K_{mj}^{\sin}|}{j}}{|n^2 - m^2|} \right\} < \infty,$$

выполнены условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1(n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2(n) = 0.$$

Тогда спектр $\sigma(A-B)$ оператора $A-B$ представим в виде

$$\sigma(A-B) = \tilde{\sigma}_m \cup \bigcup_{n \geq m+1} \tilde{\sigma}_n,$$

где $\tilde{\sigma}_n$, $n \geq m+1$, — одноточечные множества, а $\tilde{\sigma}_m$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим m . Для собственных значений $\tilde{\lambda}_n$ из $\tilde{\sigma}_n$ имеет место оценка:

$$\left| \tilde{\lambda}_n - \pi^2 n^2 - \frac{1}{2} |K_{nn}^{\sin}| + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{|K_{mn}^{\sin}| \cdot |K_{nm}^{\sin}|}{n^2 - m^2} \right| \leq \text{const} \cdot n \cdot \sup_j \frac{|K_{nj}^{\sin}|}{j} \cdot \gamma_2(n).$$

Для собственных функций $\tilde{e}_n(t)$ оператора (1) справедлива оценка:

$$\left(\int_0^1 \left| \tilde{e}_n(t) - \sqrt{2} \sin \pi n t + \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{|K_{mn}^{\sin}|}{n^2 - m^2} \sin \pi m t \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \text{const} \cdot n \cdot \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{\sup_j \frac{|K_{mj}^{\sin}|}{j}}{|n^2 - m^2|^2} \right)^{1/2},$$

где $K_{ij}^{\sin} = \int_0^1 \int_0^1 K(t,s) \sin \pi j t \sin \pi i s dt ds$ — коэффициенты разложения функции $K(t,s)$ в ряд Фурье по синусам.

Для последовательностей γ_1 и γ_2 , заданных формулами

$$\gamma_1(n) = \left(\sum_{m=1}^n \sum_{i \geq n+1} \frac{|\lambda_i|^2 \beta_i^2 \alpha_m^2 + \beta_m^2 \alpha_i^2 |\lambda_m|^2}{|\lambda_m - \lambda_i|^2} \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max \left\{ \max_{j \leq n} \left\{ \sum_{i \geq n+1} \frac{|\lambda_i| |\alpha_i \beta_i|}{|\lambda_j - \lambda_i|} \right\}; \sup_{j \geq n+1} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{|\lambda_i| |\alpha_i \beta_i|}{|\lambda_j - \lambda_i|} \right\} \right\} < \infty,$$

выполняются условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1(n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2(n) = 0.$$

На основе приведенной выше леммы сформулируем утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1).

Теорема 5. Пусть функция $K \in L_2([0,1]^2)$. Тогда, начиная с некоторого натурального n_0 , оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n)$, $n \geq n_0$, где $X^*(n)$ представим в виде (5), и $\|P(\Delta_1(n), A) - P(\tilde{\Delta}_1(n), A - B)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Учитывая, что норма в последнем выражении берётся в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, получим окончательную оценку:

$$\left(\int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x(s) \tilde{e}_j(s) ds \right) \tilde{e}_j(t) - 2 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x(s) \sin \pi js ds \right) \sin \pi jt \right]^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

для любого фиксированного x из $L_2[0,1]$ при $n \rightarrow \infty$, где $\tilde{e}_j$ — собственные (и, возможно, присоединённые), функции оператора $A - B$.

Литература

1. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. – 165 с.
2. Баскаков, А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, № 1. – С. 21–39.
3. Баскаков, А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы в аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 435–437.
4. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58, № 4. – С. 3–32.
5. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 8. – С. 1424–1433.
6. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербakov // Изв. РАН. Сер. матем. – 2011. – Т. 75, № 3. – С. 3–28.
7. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами / А. Г. Баскаков, В. Б. Диденко // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 323–338.
8. Ульянова, Е. Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Е. Л. Ульянова. – Воронеж, 1998. – 100 с.
9. Ульянова, Е. Л. О некоторых спектральных свойствах одного класса дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / Е. Л. Ульянова, А. Н. Шелковой // Вестник ВГУ, Серия физика, математика. – 2002. – № 2. – С. 106–110.
10. Шелковой, А. Н. Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / А. Н. Шелковой. – Воронеж, 2004. – 144 с.
11. Шелковой, А. Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Вестник факультета прикладной математики и механики. – 2000. – № 2. – С. 226–235.
12. Шелковой, А. Н. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А. Н. Шелковой // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2016. – № 13. – С. 72–80.

13. *Шелковой, А. Н.* Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2018. – Т. 21, № 4. – С. 18–33.
14. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Т. 3: Спектральные операторы / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М. : Мир, 1974. – 661 с.
15. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА — ДАРБУ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Э. Л. Шишкина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Связь некоторых видов случайных блужданий на прямой и гиперболических уравнений типа уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу, впервые была обнаружена Сидни Гольдштейном и Марком Кацем. В статье приведено решение обобщенного линейного гиперболического уравнения типа уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу дробного порядка.

Ключевые слова: обобщение уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу, дробный оператор Бесселя, случайные — блуждания.

Наряду с диффузионными моделями стохастических блужданий изучаются модели, связанные с волновыми уравнениями. Первый вклад в этой области восходит к Сидни Гольдштейну [1] (1951). Он рассмотрел простейшее случайное блуждание на вещественной прямой, при котором частица, помещенная в начало координат в момент времени 0, движется с двумя конечными скоростями $\pm c$ изменяя свою текущую скорость в соответствии с простейшим пуассоновским процессом с постоянным параметром λ . Им было обнаружено, что распределение положения частицы x во время t является решением телеграфного уравнения вида

$$u_{tt}(x, t) + 2\lambda u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

Затем эта модель была детально рассмотрена Марком Кацем в [2] и Энцо Орсингером в [3]. Естественные обобщения на случай Пуассоновского процесса с функцией интенсивности $\lambda = \lambda(t) \in C^1(\mathbb{R})$ и на многомерный случай были рассмотрены в [4–7]. Модели случайных блужданий с дробными производными были рассмотрены в [8, 9].

В [10] было показано, что уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2a}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u = u(x, t) \quad (1)$$

определяет вероятностный закон случайного блуждания на $\mathbb{R}$. Явное распределение $p(x, t)$ положения произвольно движущихся частиц получаются путем решения начальной задачи для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (1).

В работе [7] поставлена, но не решена задача о нахождении решения дробной версии уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу вида (multi-dimensional fractional diffusion-wave equation)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2a}{t} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^\beta u = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < \beta < 1, \quad (2)$$

$$u = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

При $\beta \in (0, 1/2)$ случае частица в среднем движется медленнее, чем при рассмотрении модели (1), которая соответствует $\beta = 1$. При $1/2 < \beta < 1$ частица в среднем движется быстрее.

Оператор $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = B_\gamma$ называется оператором Бесселя [11].

Определим дробную степень оператора Бесселя B_γ . В [12] явные формулы были выведены в виде композиций дробных интегралов Эрдейи — Кобера на пространствах распределения. Важный шаг был сделан в [13], в котором явные определения были получены в терминах гипергеометрических функций Гаусса. Более общий класс дифференциальных гипербесселевых

операторов, связанных с интегральным преобразованием Обрешкова, был рассмотрен И. Димовски и В. Киряковой [14–16]. В [17–20] представления для дробных степеней оператора Бесселя были получены с использованием функций Лежандра в качестве ядер, и на их основе общие определения были упрощены и унифицированы с использованием стандартных обозначений дробного исчисления. В указанных работах были также получены важные обобщенные формулы Тейлора, которые устанавливают связь между целочисленными степенями оператора Бесселя (вместо производных в классической формуле Тейлора) с дробной степенью оператора Бесселя в качестве интегрального остатка. Дальнейшие исследования дробных степеней оператора B_γ приведены в [21–23].

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. **Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси** $B_{\gamma,0+}^{-\alpha}$ для $f \in L[0, \infty)$ определим формулой

$$(B_{\gamma,0+}^{-\alpha} f)(x) = (IB_{\gamma,0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma} \left(\frac{x^2 - y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha + \frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f(y) dy. \quad (3)$$

Пусть $n = [\alpha] + 1$, $f \in L[0, \infty)$, $IB_{\gamma,b-}^{n-\alpha} f, IB_{\gamma,b-}^{n-\alpha} f \in C^{2n}(0, \infty)$. **Левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси типа Герасимова — Капуто** определим равенством

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^{\alpha} f)(x) = (IB_{\gamma,0+}^{n-\alpha} B_{\gamma}^n f)(x). \quad (4)$$

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^{\alpha})_t u(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq \alpha < 1/2, \quad (5)$$

с условиями

$$u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (6)$$

Применяя преобразование Фурье к (5)–(6), получим

$$(\mathcal{B}_{\gamma,0+}^{\alpha})_t \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad 0 \leq \alpha < 1/2, \quad (7)$$

с условиями

$$\hat{u}(\xi, 0) = 1, \quad \hat{u}_t(\xi, 0) = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (7)–(8) получено в [22] и имеет вид

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{2^{\gamma} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} \left(1 + \frac{\gamma}{2}, \alpha\right), (1, 1) \\ (1, \alpha), (\gamma+1, 2\alpha) \end{matrix} \middle| -\xi^2 x^{2\alpha} \right],$$

где ${}_p\Psi_q$ — функция функции Фокса — Райта, являющаяся обобщением обобщенной гипергеометрической функции ${}_pF_q$, и имеет представление вида

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, A_1) & (a_2, A_2) & \dots & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) & (b_2, B_2) & \dots & (b_q, B_q) \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + A_1 n) \cdots \Gamma(a_p + A_p n)}{\Gamma(b_1 + B_1 n) \cdots \Gamma(b_q + B_q n)} \frac{z^n}{n!}.$$

Тогда

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{A_{\gamma} t} (\mathcal{P}_t^{\gamma})^{-1} t^{1-\alpha} H_{1,1}^{1,0} \left[|x| t^{-\alpha} \middle| \begin{matrix} (\gamma+1-\alpha, \alpha) \\ (0, 1) \end{matrix} \right],$$

где $A_{\gamma} = \frac{\pi}{2^{\gamma} \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}$,

$$(\mathcal{P}_x^{\gamma})^{-1} g(x) = \frac{2\sqrt{\pi} x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{\gamma}{2}\right)} \left(\frac{d}{2x dx}\right)^n \int_0^x g(z) (x^2 - z^2)^{n-\frac{\gamma}{2}-1} z^{\gamma} dz,$$

$n = \left[\frac{\gamma}{2} \right] + 1$, $H_{p,q}^{m,n}$ — H-функция Фокса, обобщающая G-функцию Мейера, определяется как интеграл Меллина — Барнса

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1) & (a_2, A_2) & \dots & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) & (b_2, B_2) & \dots & (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)} z^{-s} ds,$$

где L — некоторый контур, разделяющий полюса двух множителей в числителе.

Литература

1. Goldstein, S. On diffusion by discontinuous movements and the telegraph equation / S. Goldstein // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1951. – V. 4. – P. 129–156.
2. Katz, M. A stochastic model related to the telegrapher's equation / M. Katz // Rocky Mountain J. Math. – 1974. – V. 4. – P. 497–509.
3. Orsingher, E. Hyperbolic equations arising in random models / E. Orsingher // Stochastic Process Appl. – 1985. – No 21. – P. 93–106.
4. Orsingher, E. A planar random motion governed by the two-dimensional telegraph equation / E. Orsingher // J. Appl. Probab. – 1986. – No 23. – P. 385–397.
5. Orsingher, E. Probability law, flow function, maximum distribution of wave-governed random motions, and their connections with Kirchhoff's laws / E. Orsingher // Stochastic Process Appl. – 1990. – No 34. – P. 49–66.
6. Iacus, S. Statistical analysis of the inhomogeneous telegrapher's process / S. Iacus // Statistics & Probability Letters. – 2001. – No 55. – P. 83–88.
7. Garra, R. Random flights related to the Euler — Poisson — Darboux equation / R. Garra, E. Orsingher // Markov processes and related fields. – 2016. – No 22. – P. 87–110.
8. Metzler, R. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Physics Report. – 2000. – No 339. – P. 1–77.
9. Gorenflo, R. R. Discrete and continuous random walk models for space-time fractional diffusion / R. R. Gorenflo, A. Vivoli, F. Mainardi // Nonlinear Dynamics. – 2004. – V. 38. – P. 101–116.
10. De Gregorio, A. Flying randomly in R^d with Dirichlet displacements / A. De Gregorio, E. Orsingher // Stoch. Process. Appl. – 2012. – V. 122, No 2. – P. 676–713.
11. Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. – Москва : Наука-Физматлит, 1997. – 204 с.
12. McBride, A. C. Fractional calculus and integral transforms of generalized functions / A. C. McBride. – London : Pitman, 1979. – 179 p.
13. Sprinkhuizen-Kuyper, I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator / I. G. Sprinkhuizen-Kuyper // J. Math. Analysis and Applications. – 1979. – V. 72. – P. 674–702.
14. Dimovski, I. H. Convolutional Calculus / I. H. Dimovski. – Kluwer : Dordrecht, 1990. – 184 p.
15. Dimovski, I. H. Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G -function / I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova // in: "Complex Analysis and Applications'83" (Proc. Intern. Conf. Varna 1983), Sofia. – 1985. – P. 45–66.
16. Kiryakova, V. Generalized fractional calculus and applications / V. Kiryakova. – London : Pitman. Notes Math. 301, Longman Scientific & Technical, Harlow, Co-publ. New York: John Wiley, 1994. – 388 p.
17. Ситник, С. М. О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям / С. М. Ситник // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2010. – Т. 12, № 2. – С. 69–75.

18. Ситник, С. М. Об обобщении формулы Хилле — Тамаркина для резольвенты на случай операторов дробного интегрирования Бесселя / С. М. Ситник // III Международная конференция: «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик. – 2006. – С. 269–270.
19. Ситник, С. М. Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя / С. М. Ситник, Д. С. Конавалова // В сб.: Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы «Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения – VII» – Воронеж. – 1996. – С. 102.
20. Sitnik, S. M. Transmutations and applications: A survey / S. M. Sitnik – arXiv:1012.3741v1, 2010. – 141 p.
21. Shishkina, E. L. On fractional powers of Bessel operators / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions. – 2017. – V. 8, No 1. – P. 49–67.
22. Shishkina, E. L. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov – Caputo type / E. L. Shishkina, S. M. Sitnik // Mathematics. – 2019. – V. 7, No 12. – P. 1–21.
23. Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 224 с.

ВЕСОВОЕ СФЕРИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ И ЕГО ОБРАЩЕНИЕ

Э. Л. Шишкина¹, Н. И. Лобанова²¹Воронежский государственный университет²Муниципальное учреждение дополнительного образования
«Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района»

Аннотация. В этой статье получена одна из формул обращения для весового сферического среднего. Задача обращения весового сферического среднего имеет множество приложений в различных математических, физических и биологических областях. Прежде всего, эта проблема напрямую связана с обратными задачами для гиперболических уравнений. Во-вторых, если мы имеем дело с различными методами визуализации, такими как компьютерная томография, радар и сонар, а функции сигналов имеют радиальную симметрию, то мы приходим к задаче обращения весового сферического среднего.

Ключевые слова: весовое сферическое среднее, оператор Бесселя, гиперболический В-потенциал Рисса.

Неотъемлемой частью теории дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа являются сферические средние

$$M(x, r, u) = \frac{1}{|S_n(1)|} \int_{S_n(1)} u(x + \beta r) dS, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

где $S_n(1)$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат, β — координата на этой сфере, $|S_n(1)|$ — площадь такой сферы. В случае, когда рассматриваются уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя вида $(B_\nu)_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\nu}{t} \frac{d}{dt}$, вместо сферических средних возникают весовые сферические средние (2).

Восстановление функции по известному подмножеству ее сферических средних (1) широко известная задача в прикладной математике. Его связь с фотоакустическими изображениями заключается в следующем.

Пусть скорость распространения звука в среде будет постоянной величиной. Тогда давление в определенный момент времени выражается через среднее сферическое давления и его производной по времени в некоторый предыдущий момент времени [1]. Отсюда следует, что для получения фотоакустического изображения требуется восстановить функцию по ее сферическому среднему.

Задача восстановления функции f с носителем в шаре $B \in \mathbb{R}^n$, если сферические средние f известны по всем геодезическим сферам с центром на границе ∂B , была решена, например, в [1]. Примечательно, что формулы восстановления в этой работе различны для четной и нечетной размерности евклидова пространства n .

В этой работе мы рассмотрим весовое сферическое среднее (см. [2–4]) функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$ для $n \geq 2$ вида

$$(M_t^\gamma f)(x) = (M_t^\gamma)_x[f(x)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} {}^\gamma \mathbb{T}_x^\theta f(x) \theta^\gamma dS, \quad (2)$$

где

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $\theta^\gamma = \prod_{i=1}^n \theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n) = \{\theta : |\theta| = 1, \theta \in \mathbb{R}_+^n\}$ — часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$ и $|S_1^+(n)|_\gamma$ дается формулой

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n + |\gamma|}{2}\right)}.$$

В формуле (2) ${}^\gamma \mathbb{T}_x^\gamma$ — многомерный обобщенный сдвиг

$$({}^\gamma \mathbb{T}_x^\gamma f)(t, x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{\gamma_1} \dots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{\gamma_n} f)(t, x).$$

Каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{\gamma_i}$, $i = 1, \dots, n$ дается формулой (см. [5], стр. 122, формула (5.19))

$$({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{\gamma_i} f)(t, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \sin^{\gamma_i-1} \varphi_i \times f(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) d\varphi_i,$$

$\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. При $\gamma_i = 0$ обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{\gamma_i}$ определен как

$${}^0 T_{x_i}^{\gamma_i} = \frac{f(x + y) + f(x - y)}{2}.$$

Для $n = 1$ положим $M_t^\gamma[f(x)] = {}^\gamma T_x^t f(x)$.

Теорема. Пусть $f = f(x) \in C^2(\mathbb{R}_+^n)$, такая что $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0$, $i = 1, \dots, n$ и

$$(\mathbb{M}_t^{\gamma, k} f)(x) = \frac{t^{k-n-|\gamma|}}{2C(k-n-|\gamma|+1)} \left(\mathcal{P}_t^{k-n-|\gamma|+1} t^{n+|\gamma|-1} (M_\rho^\gamma f)(x) \right)(t),$$

где $M_\rho^\gamma f$ — весовое сферическое среднее (2) функции f ,

$$\mathcal{P}_t^\nu = \frac{2C(\nu)}{t^{\nu-1}} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{\frac{\nu}{2}-1} f(\tau) d\tau,$$

— оператор Пуассона, $C(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$. Тогда функция f может быть восстановлена по ее

весовому сферическому среднему по формуле

$$f(x) = \frac{e^{-t} |S_1^+(n)|_\gamma}{N(2m, \gamma, n)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\Delta_\gamma)_x \right)^m e^t \int_0^\infty e^{-\tau} (\mathbb{M}_\tau^{\gamma, 2m} f)(x) d\tau,$$

где

$$N(\alpha, \gamma, n) = \frac{2^{\alpha-n-1}}{\sqrt{\pi}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - n - |\gamma| + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$(\Delta_\gamma)_x = \sum_{i=1}^n (B_{\gamma_i})_{x_i}, \quad (B_{\gamma_i})_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Литература

1. Finch, D. Determining a function from its mean values over a family of spheres / D. Finch, S. Patch, K. Rakesh // SIAM J. Math. Anal. – 2004. – V. 35, No 5. – P. 1213–1240.

2. Ляхов, Л. Н. Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 516–528.
3. Ляхов, Л. Н. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 533–538.
4. Ситник С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2019. – 224 с.
5. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. М. Левитан // Успехи матем. наук. — 1951. — Т. VI, В. 2(42). – С. 102–143.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. И. Эгамов

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Аннотация. В настоящей статье приведен пример начально-краевой задачи для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Показано существование его решения, единственность. Приведена связь его решения и решения линейной начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Исходное уравнение является представителем класса интегро-дифференциальных уравнений, которое изучалось автором в различных работах.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, начально-краевая задача, гиперболическое уравнение.

В настоящей статье приведен пример начально-краевой задачи для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, изучение которого и подробное описание приведено в [1]. Показана связь его и линейной начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Там же в [1] приведены пять примеров из этого класса, еще два примера рассмотрены в [2–3].

Рассмотрим управляемый процесс колебаний тонкой однородной струны. На процесс колебаний струны осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей. Запишем математическую постановку задачи.

Основная начально-краевая задача

На множестве $Q = (0, l) \times (0, T)$, $l > 0$, $T > 0$; найти функцию $y(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x ; непрерывную дифференцируемую по t и непрерывно дифференцируемую по x в $\bar{Q} = [0, l] \times [0, T]$ — решение уравнения

$$y''_{tt}(x, t) = a^2 y''_{xx}(x, t) + u(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям второго рода

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0, \quad (2)$$

и начальным

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3)$$

с условиями связи типа (2), наложенными на начальные функции. Здесь a — константа, $u(x, t)$ — некое управление, функции $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$ задают начальные данные струны, $\varphi(x) \in C^1[0, l]$, $\psi(x) \in C[0, l]$, и они удовлетворяют условиям связи (2).

Пусть управление с обратной связью — непрерывная функция $u(x, t)$:

$$u(x, t) = (b(x) - R[y])y(x, t) - 2Q[y]y'_t(x, t), \quad (4)$$

где операторы $Q[y]: C^2(\bar{Q}) \rightarrow C^1[0, T]$, $R[y]: C^2(\bar{Q}) \rightarrow C[0, T]$.

Определим более подробно операторы

$$Q[y] \equiv q(t) = \int_0^l b(x)y(x, t)dx, \quad q(0) = 0, \quad R[y] \equiv r(t) = q'_t(t) + q^2(t),$$

$$R[y] \equiv r(t) = \int_0^l b(x) y'_t(x, t) dx + \left(\int_0^l b(x) y(x, t) dx \right)^2,$$

где $b(x)$ — непрерывная функция. Производную и интеграл можно менять местами [5]. Кроме того, справедливы равенства:

$$\int_0^l \psi(x) dx = 1, \quad \int_0^l b(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (5)$$

Поэтому уравнение (1) переписывается в виде

$$y''_{tt}(x, t) = a^2 y''_{xx}(x, t) + y(x, t) \left(b(x) - \int_0^l b(x) y'_t(x, t) dx - \left(\int_0^l b(x) y(x, t) dx \right)^2 \right) - \\ - 2y'_t(x, t) \int_0^l b(x) y(x, t) dx.$$

Вспомогательная начально-краевая задача

Пусть функция $z(x, t)$ — классическое решение гиперболического уравнения на множестве Q :

$$z''_{tt}(x, t) = a^2 z''_{xx}(x, t) + b(x) z(x, t), \quad (6)$$

с граничными и начальными условиями

$$z'_x(0, t) = z'_x(l, t) = 0, \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad z'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (7)$$

Функции $b(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены выше. Известно [4], что существует единственное решение задачи (6), (7).

Основная теорема

Пусть $P(t) = \int_0^l z'_t(x, t) dx$. Из [1] следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $P(t) \neq 0$ на отрезке $t \in [0, T]$. Решение нелинейной задачи (1)–(5) выражается через решение линейной задачи (5)–(7):

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{\int_0^l z'_t(x, t) dx} \equiv \frac{z(x, t)}{P(t)}. \quad (8)$$

Учитывая (8), нетрудно видеть, что

$$Q[y] \equiv q(t) = \frac{P'_t(t)}{P(t)}; \quad R[y] \equiv r(t) = \frac{P''_{tt}(t)}{P(t)}. \quad (9)$$

Таким образом, решение нелинейной задачи (1)–(5) сводится к решению линейной задачи (5)–(7), поэтому, далее, можно применять методы решения для линейных задач, например, при лучшей гладкости начальных функций метод разделения переменных.

Литература

1. Бураго, П. Н. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // П. Н. Бураго, А. И. Эгамов // Журн. Средневолж. матем. о-ва. 2019. – Т. 21, № 4. – С. 413–429. – doi: 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429.

2. Эгамов, А. И. Об одном специфическом уравнении гиперболического типа / А. И. Эгамов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов конференции. Воронеж. 11–13 ноября 2019 г. – ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет». Издательство: Научно-исследовательские публикации, 2020. – С. 141–144.
3. Эгамов, А. И. Об одной начально-краевой для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения / А. И. Эгамов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – Суздаль. 3–8 июля 2020 г. Суздаль, 2020. – С. 182–183.
4. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики. Учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с.
5. Позняк, Э. Г. Основы Математического анализа. Часть 2 / Э. Г. Позняк, В. А. Ильин. – Москва : Физматлит, 2002. – 464 с.