

Ерёмин А.М.¹, Захаров П.В.¹, Манаков Н.А.², Старостенков М.Д.³

¹Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет
им. В.М. Шукшина,

ул. Короленко, 53, 659333, Бийск, Россия

²Оренбургский государственный университет,
пр. Победы, 13, 460018, Оренбург, Россия

³Алтайский государственный технический университет им. И.И.
Ползунова, пр. Ленина, 46, 656099, Барнаул, Россия

К ВОПРОСУ О СТАТИСТИЧЕСКОМ СРАВНЕНИИ ТОЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ С КВАЗИ-БРИЗЕРНЫМИ МОДЕЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ КРИСТАЛЛА СТЕХИОМЕТРИИ A_3B

В работе методом молекулярной динамики проводится статистическое сравнение точных дискретных бризеров с квази-бризерными модельными решениями кристалла стехиометрии A_3B , на примере Pt_3Al . Получен фононный спектр данного модельного кристалла, получены зависимости среднеквадратичного отклонения, коэффициента вариации, средней частоты модельного квази-бризера от времени его существования. Так же в рамках данной модели были рассчитаны следующие статистические характеристики и зависимости: группированный статистический ряд абсолютных и относительных частот, полигон абсолютных и относительных частот, гистограмма относительных частот, оценка математического ожидания и дисперсии исходной выборки. Анализ статистических данных позволяет сделать вывод о том, что в рассматриваемой модели с использованием потенциала межатомного взаимодействия, полученного методом погружённого атома (ЕАМ), квази-бризерное решение незначительно отличается от точного бризерного решения.

Ключевые слова: молекулярная динамика, дискретный бризер, квази-бризер, среднеквадратичное отклонение, коэффициент вариации, фононный спектр.

Введение

Дискретный бризер (ДБ) представляет собой нелинейные локализованные незатухающие колебания большой амплитуды атомов идеального кристалла [1]. Стоит отметить, что для большинства моделей реальных кристаллов, имеет смысл говорить не о ДБ, а о квазибризерах или квазидискретных бризерах (КДБ) [2], в силу отсутствия возможности задания идеальных начальных условий для всех атомов, участвующих в колебаниях. Данное ограничение приводит к конечному времени жизни КДБ и разбросу частот атомов входящих в состав дискретного бризера. При этом в работе [2] говорится, что

присутствие в решении членов с малыми амплитудами, частоты которых отличаются от основной бризерной частоты, не является причиной потери их устойчивости. Тем не менее, КДБ имеют ограниченное время жизни в реальных моделях кристаллов, которое зависит от начальной конфигурации атомов и свойств рассматриваемого материала. Далее будем использовать понятие дискретный бризер, квазибризер и квазидискретный бризер как синонимы.

По характеру зависимости частоты от амплитуды, ДБ можно разделить на два типа: с мягким типом нелинейности и жестким типом нелинейности. У дискретных бризеров с мягким типом нелинейности частота уменьшается с увеличением амплитуды, и по этой причине, они могут существовать только в кристаллах, имеющих щель в фононном спектре. Для дискретных бризеров с жестким типом нелинейности имеет место обратная зависимость, то есть их частота увеличивается с увеличением амплитуды, при этом они могут иметь частоты, как в щели, так и выше фононного спектра. Дискретные бризеры с мягким типом нелинейности могут возбуждаться в биатомных кристаллах, например, в щелочно-галогидных кристаллах со структурой NaCl [3–4], в упорядоченных сплавах с большой разницей атомных масс компонент, например, в Pt₃Al [5–14], а также в графене и графене. Дискретные бризеры с жестким типом нелинейности могут существовать в одномерных и двумерных кристаллах с Морзевским взаимодействием, а также в чистых металлах с ГЦК, ОЦК и ГПУ структурой [15–16]. Исследования, связанные с ДБ, в последнее время вышли на более высокий уровень. Результаты многочисленных недавних работ говорят о том, что ДБ существуют практически во всех кристаллах [17]. Есть все основания полагать, что ДБ найдут свое место при объяснении различных физических явлений в кристаллах.

Дискретный бризер, как строго периодический во времени объект, получается при численном моделировании лишь в случае идеальной настройки начальных условий задачи Коши на некоторое многообразие малой размерности в многомерном пространстве всех возможных начальных значений координат отдельных частиц и их скоростей. Такую точную настройку трудно осуществить даже при проведении вычислительного эксперимента. Тем более это практически невозможно сделать при постановке любых физических экспериментов, особенно в тех случаях, когда бризероподобные объекты возникают спонтанно [18–19].

В связи с этим, в работе [2] была выдвинута концепция квази-бризеров, как некоторых локализованных в пространстве, но не строго периодических во времени динамических объектов. При этом был сформулирован определенный критерий близости квази-бризера к соответствующему ему точному бризеру, основанный на вычислении среднеквадратичного отклонения $\eta(t_k)$ частот колебаний отдельных частиц бризера, найденных на некотором интервале в окрестности момента t_k , и вычислении среднеквадратичного отклонения частот колебаний выделенной j -й частицы бризера на различных временных интервалах.

Целью данной работы является проведение статистической оценки сравнения точных дискретных бризеров квази-бризерными модельными

решениями. В качестве метода исследования в нашей работе выбран метод молекулярной динамики. Выбор метода обусловлен рядом фактором. ДБ весьма затруднительно наблюдать в натурном эксперименте в виду того, что они не являются топологическими дефектами, имеют время жизни порядка нескольких тысяч периодов атомных колебаний, что составляет около 0,1 нс, кроме того, в металлах они могут перемещаться со значительными скоростями. В то же время, компьютерное моделирование стало весьма продуктивным методом исследования в физике конденсированного состояния и в материаловедении. Этот факт обусловлен постоянным ростом мощности и доступности вычислительных машин, разработкой и программной реализацией численных методов. Одним из наиболее эффективных методов изучения ДБ является метод молекулярной динамики, опирающийся на хорошо апробированные межатомные потенциалы. Говоря более подробно о методе молекулярной динамики, следует отметить, что он позволяет решать задачи, касающиеся проблем структурно энергетических трансформаций, как в кристаллических, так и в некристаллических материалах. Кроме того, данный метод позволяет рассчитать многие свойства системы, как термодинамические (например, энергию, давление, энтропию), так и кинетические (коэффициенты диффузии, частоты колебаний атомов). Причем в данном методе динамика процессов исследуется в реальном времени.

Модель и методика эксперимента

Моделирование проводилось с использованием пакета молекулярной динамики LAMMPS Molecular Dynamics Simulator [20]. Исследуемая модель представляла собой объёмный ГЦК кристалл стехиометрии A_3B . Как частный случай рассматривался кристалл Pt_3Al , содержащий 50000 атомов (рис. 1).

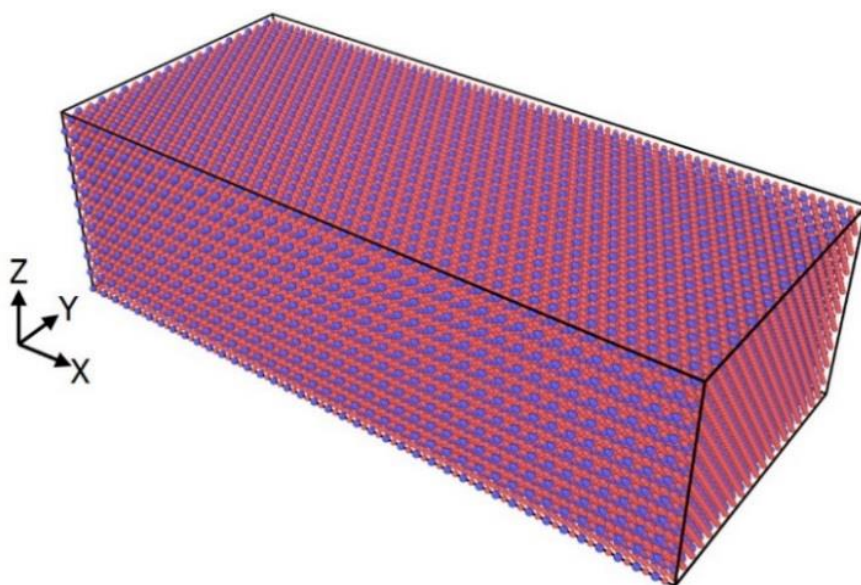


Рис. 1. Объёмный вид кристалла Pt_3Al , содержащего 50000 частиц, ось X ориентирована вдоль кристаллографического направления $\langle 100 \rangle$, Y - $\langle 010 \rangle$, Z - $\langle 001 \rangle$.

Сплавы стехиометрии A_3B со сверхструктурой $L1_2$ являются самыми многочисленными, поиск известных в настоящее время систем, обладающих $L1_2$ структурой, позволил выявить порядка 190 таких фаз в области состава A_3B . Также сплавы с данной структурой являются наиболее часто модельными и выбираются для фундаментальных исследований с целью разработки структурно-физических основ создания новых конструкционных и функциональных материалов с различными уникальными свойствами. Сплавы с $L1_2$ структурой являются основой разработки существующих в настоящее время суперсплавов [21].

Для моделирования межатомного взаимодействия использовался потенциал полученный методом погруженного атома (ЕАМ). В вычислительной химии модель погружённого атома используется для приближенного описания энергии взаимодействия между двумя атомами. ЕАМ потенциал генерировался для данного сплава с использованием программного обеспечения предложенного Zhou [22]. Выбор потенциала и обоснованность его использования для конкретной задачи является важным этапом при моделировании.

Полная энергия E кристалла может быть выражено как

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} \varphi_{ij}(r_{ij}) + \sum_i F_i(\rho_i), \quad (1)$$

где φ_{ij} представляет парную энергию между атомами i и j отделенными друг от друга расстоянием r_{ij} , а F_i энергия вложения связанная с вложенным атомом i в локальном местоположении с электронной плотностью ρ_i . Электронная плотность можно рассчитать по формуле $\rho_i = \sum_{j,j \neq i} f_j(r_{ij})$, где $f_j(r_{ij})$ - электронная плотность на участке атома i находящегося на расстоянии r_{ij} от атома j . Потенциалы, применяемые в этой модели, хорошо подогнаны к основным свойствам материалов, таким как постоянные решетки, упругие постоянные, объемные модули, энергии образования вакансий и энергии сублимации, и они дают достаточно хорошие решения [22]. Процесс подготовки модели состоял из первоначальной релаксация кристалла со свободными граничными условиями вдоль всех осей при температурах 500 К с последующим охлаждением до 0 К, что позволяло исключить влияние тепловых колебаний на бризеры в кристалле. Возбуждение модельного квазibriзера наблюдалось при отклонении атома Al вдоль направления $\langle 100 \rangle$.

В отличие от точных дискретных бризеров, квази-бризеры являются не строго периодическими во времени динамическими объектами, хотя и локализованными в пространстве. Они возникают при любых достаточно малых отклонениях от точных бризерных решений в многомерном пространстве всех возможных начальных условий при решении задачи Коши для исходных дифференциальных уравнений, поскольку в этом случае не происходит полного подавления вкладов от колебаний периферийных частиц со своими собственными частотами. Таким образом, «ослабление диктатуры» со стороны ядра бризера (в случае рассматриваемого нами простейшего симметричного бризера, также ядро образует одна центральная частица, а в

случае антисимметричного бризера – две его центральные частицы) приводит к наличию в бризерном решении малых вкладов, имеющих разные частоты. Эти малые вклады можно обнаружить в колебаниях всех частиц цепочки, в частности, и центральных. Если найти достаточно точно частоты колебаний всех частиц квази-бризера, вычисленные на некотором временном интервале вблизи $t = t_k$, то они не будут строго одинаковыми. В свете этого найдём среднеквадратичные отклонения $\eta(t_k)$ частоты колебаний различных частиц бризера от средней бризерной частоты $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i(t_k), \quad (2)$$

$$\eta(t_k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\omega_i(t_k) - \bar{\omega}(t_k))^2}{N(N-1)}}. \quad (3)$$

Чем больше величина $\eta(t_k)$, тем больше отличается квази-бризерное решение от точного бризерного решения, для которого $\eta(t_k)=0$ в любой момент времени t_k .

Результаты и обсуждение

Для существования квази-бризера в первую очередь важно распределение фононных мод, т.е. фононный спектр кристалла. На рис. 2 показаны фононные спектры ячейки кристалла Pt_3Al .

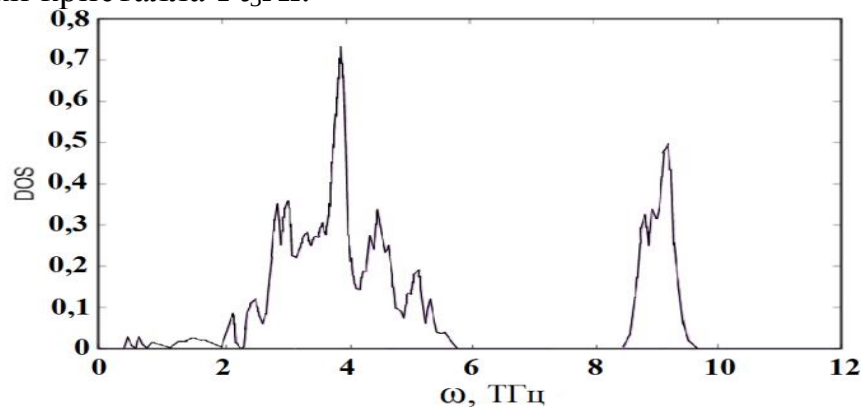


Рис. 2. Фононный спектр кристалла Pt_3Al .

На рис. 3 приведена зависимость среднеквадратичного отклонения модельного квази-бризера η от времени его существования t_k (в пс).

Графики, описывающие поведение среднеквадратичного отклонения $\eta(t_k)$ как функции времени t_k для некоторых видов квази-бризеров, в частности, для бризеров Джеймса, приведем в работе [2].

Среднеквадратичное отклонение характеризует меру рассеяния данных. В нашем случае это отклонение частот периферийных атомов модельного квази-бризера от частоты ядра квази-бризера. Среднее квадратическое отклонение дает абсолютную оценку меры разброса.

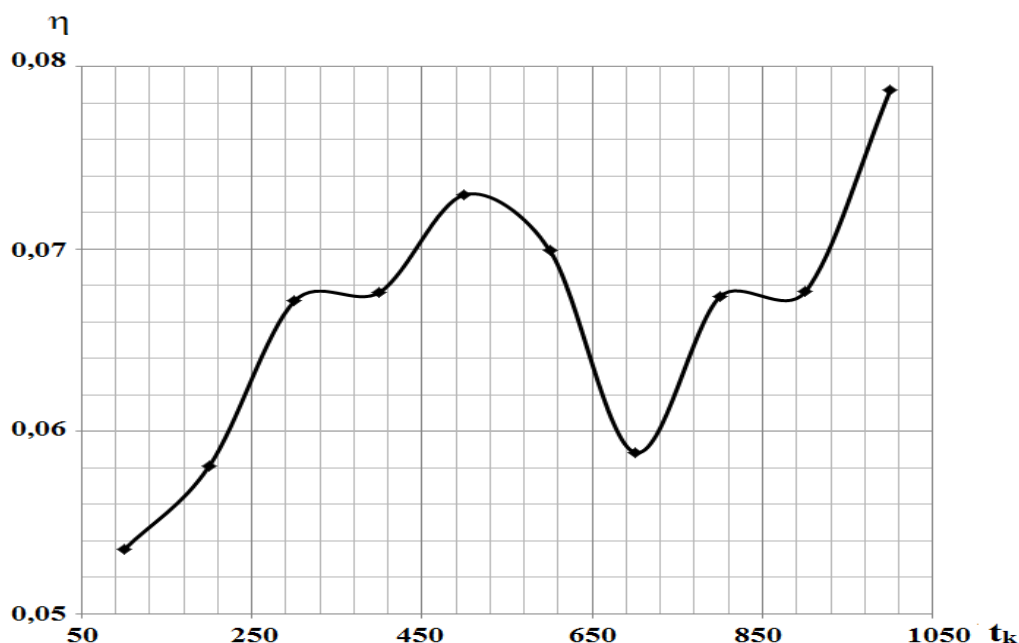


Рис. 3. Зависимость $\eta(t_k)$.

Так же в рамках данной модели были рассчитаны следующие статистические характеристики и зависимости: группированный статистический ряд абсолютных и относительных частот, полигон абсолютных и относительных частот, гистограмма относительных частот, оценка математического ожидания и дисперсии исходной выборки.

Рассматривалась выборка из 10 элементов ($x_1, x_2 \dots x_{10}$): {частоты квазибризера}: 7,76231₀₀₁ 7,71635₀₀₂ 7,68689₀₀₃ 7,72135₀₀₄ 7,71036₀₀₅ 7,74677₀₀₆ 7,83961₀₀₇ 7,75357₀₀₈ 7,76333₀₀₉ 7,73160₀₁₀.

Построим группированный статистический ряд абсолютных частот. Это последовательность пар чисел $(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*)$, где x_k^* — центр k -го интервала группировки и n_k^* — число элементов выборки, попавших в k -й интервал. Числа n_k^* ($k = 1, \dots, m$) — абсолютные частоты. Минимальный и максимальный элемент выборки, это 3-й и 7-й элементы соответственно, $x_{\min} = 7,68689$ и $x_{\max} = 7,83961$. Находим длину интервала группировки $h = (x_{\max} - x_{\min})/m = (7,83961 - 7,68689)/10 = 0,01527$. Здесь $m = 10$ — число интервалов группировки. Правые границы интервалов группировки: $x_k = x_{\min} + kh$ ($k = 1, \dots, 10$). Получаем: (7,70216 7,71743); (7,73270 7,74798); (7,76325 7,77852); (7,79379 7,80907); (7,82434 7,83961).

Для каждого интервала группировки (x_{k-1}, x_k) находим число n_k^* элементов выборки, попавших в этот интервал. Важно чтобы каждый элемент выборки был отнесен к одному и только к одному интервалу, а если значение элемента попадает на границу интервала, то будем относить его к интервалу с младшим номером. Минимальный элемент всегда относим к первому интервалу, максимальный к последнему. Для упрощения работы воспользуемся таблицей 1.

Таблица 1. Вспомогательная таблица для расчёта группированного статистического ряда абсолютных частот квазибризера.

Номер интервала k	Центр интервала x_k^*	Границы интервала	Попало в интервал n_k^*	Номера элементов попавших в интервал
1	7,69452	7,68689 ... 7,70216	1	3
2	7,70979	7,70216 ... 7,71743	2	2 5
3	7,72507	7,71743 ... 7,73270	2	4 10
4	7,74034	7,73270 ... 7,74798	1	6
5	7,75561	7,74798 ... 7,76325	2	1 8
6	7,77088	7,76325 ... 7,77852	1	9
7	7,78616	7,77852 ... 7,79379	0	
8	7,80143	7,79379 ... 7,80907	0	
9	7,81670	7,80907 ... 7,82434	0	
10	7,83197	7,82434 ... 7,83961	1	7

Убеждаемся, что сумма всех абсолютных частот n_k^* равна объёму выборки 10. Группированный статистический ряд абсолютных частот квазибризера приведен в таблице 2.

Таблица 2. Группированный статистический ряд абсолютных частот квазибризера.

x_k^*	7,69452	7,70979	7,72507	7,74034	7,75561
n_k^*	1	2	2	1	2
x_k^*	7,77088	7,78616	7,80143	7,81670	7,83197
n_k^*	1	0	0	0	1

Полигон абсолютных частот группированного статистического ряда абсолютных частот – это ломаная с вершинами в точках (x_k^*, n_k^*) показан на рис. 4. Следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы полигон был максимально наглядным. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки $x_1^* = 7.69452$, и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $[x_1^*, x_{10}^*] = [7.69452, 7.83197]$ и отчетливо различались точки x_k^* . На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $[\min\{n_1^*/n, \dots, n_{10}^*/n\}, \max\{n_1^*/n, \dots, n_{10}^*/n\}] = [0.00000, 0.20000]$ и отчетливо различались точки n_k^*/n . На оси абсцисс размещаем значения x_k^* , а на оси ординат значения n_k^*/n . Наносим точки $(x_1^*, n_1^*/n)$, $(x_2^*, n_2^*/n)$, ..., $(x_{10}^*, n_{10}^*/n)$ на координатную плоскость и последовательно соединяем их отрезками.

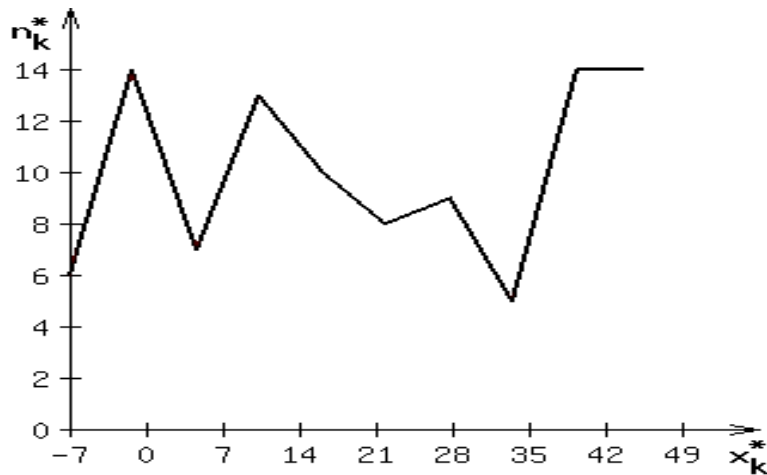


Рис. 5. Полигон абсолютных частот квазибризера.

Оценка математического ожидания (выборочное среднее) не сгруппированной выборки ($x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{10}$) вычислялась по формуле:

$$M^* = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (4)$$

Оценка математического ожидания (выборочное среднее) исходной выборки составляет: 7,743215.

Оценка дисперсии, не сгруппированной выборки ($x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{10}$) вычислялась по формуле:

$$D^* = \frac{(x_1 - M^*)^2 + (x_2 - M^*)^2 + \dots + (x_n - M^*)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - M^*)^2, \quad (5)$$

где M^* — оценка математического ожидания (выборочное среднее).

Оценка дисперсии исходной выборки составляет: 0,001752.

Из приведенных числовых данных видно, что отклонение частоты периферийных атомов модельного квази-бризера от частоты ядра квази-бризера крайне незначительно. Причём средняя частота варьируется в пределах от 7,68688603 ТГц до 7,83960979 ТГц, что соответствует щели фононного спектра кристалла Pt_3A (см. рис. 2). Следовательно, в данной модели с использованием ЕАМ-потенциала квази-бризерное решение незначительно отличается от точного бризерного решения [23–24].

Заключение

Методом молекулярной динамики в модели кристалла стехиометрии A_3B , на примере Pt_3Al с использованием потенциала межатомного взаимодействия, полученного методом погружённого атома (ЕАМ), рассмотрен дискретный бризе с позиции концепции квази-бризеров. Получены статистические характеристики квази-бризера, а также рассчитаны дополнительные параметры, позволяющие говорить о том, что рассмотренный квази-бризер незначительно отличается от точного бризерного решения и является устойчивым в течении продолжительного времени. Результаты проведенного исследования могут быть полезны при анализе результатов радиационного воздействия, лазерной обработки материалов и т.п.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Алтайского края в рамках научного проекта № 18-42-220002.

Литература

1. Flach S., Gorbach A.V. Discrete breathers advancer in theory and application // Phys. Rep. – 2008. – Vol. 467. – P. 1–116.
2. Chechin G. M., Dzhelauhova G. S., and Mehonoshina E. A. Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 74. – P. 36608.
3. Дмитриев С.В., Хадеева Л.З. Характеристики щелевых дискретных бризеров в кристаллах со структурой NaCl // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – Т. 18. – №6. – С. 85–92.
4. Khadeeva L.Z., Dmitriev S.V. Discrete breathers in crystals with NaCl // Phys. Rev. B – 2010. – Vol. 81. – P. 214306.
5. Старостенков М.Д., Захаров П.В., Медведев Н.Н. Изучение посредством двумерной модели возможности существования нелинейных локализованных колебаний на границе биметалла Pt-Al // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2011. – Т.8, № 4. – С. 40–44.
6. Маркидонов А.В., Старостенков М.Д., Павловская Е.П., Яшин А.В., Медведев Н.Н., Захаров П.В., Ситников А.А. Расщепление вакансионной поры в зернограничной области ударной послекасадной волной // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2013. – Т. 10, № 3. – С. 443–450.
7. Медведев Н.Н., Старостенков М.Д., Потекаев А.И., Захаров П.В., Маркидонов А.В., Ерёмин А.М. Локализация энергии в упорядоченных конденсированных системах: сплавы состава A_3B со сверхструктурой $L1_2$ // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 92–100.
8. Захаров П.В., Ерёмин А.М., Старостенков М.Д., Маркидонов А.В. Влияние бивакансии Pt в кристалле Pt_3Al на нелинейную локализованную моду большой амплитуды // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры [Электронный ресурс]: материалы Всероссийской научно-методической конференции (с международным участием); Оренбург. гос. ун-т. – Электрон. дан. – Оренбург: ОГУ, 2015. – электрон. опт. диск (CD-ROM). – С. 1055–1061.
9. Захаров П.В., Старостенков М.Д., Дмитриев С.В., Медведев Н.Н., Ерёмин А.М. Моделирование взаимодействия дискретных бризеров различного типа в нановолокне кристалла Pt_3Al // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2015. – Т. 148, вып. 2(8). – С. 252–257.
10. Старостенков М.Д., Потекаев А.И., Дмитриев С.В., Захаров П.В., Ерёмин А.М., Кулагина В.В. Динамика дискретных бризеров в кристалле Pt_3Al // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2015. – Т. 58, № 9. – С. 136–140.
11. Захаров П.В., Ерёмин А.М., Старостенков М.Д., Маркидонов А.В. Компьютерное моделирование нелинейной локализованной колебательной моды большой амплитуды в кристалле Pt_3Al с бивакансией Pt // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 5. – С. 1089–1096.

12. Захаров П.В., Старостенков М.Д., Ерёмин А.М., Корзникова Е.А., Дмитриев С.В. Возбуждение щелевых дискретных бризеров в кристалле состава A_3B потоком частиц // Физика твердого тела. – 2017. – Т. 59, № 2. – С. 217-222.
13. Захаров П.В., Дмитриев С.В., Старостенков М.Д., Ерёмин А.М., Корзникова Е.А. Стационарные квазибризеры в моноатомных металлах с ГЦК-структурой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2017. – Т. 152, вып. 5 (11). – С. 1073-1080.
14. Захаров П.В., Старостенков М.Д., Ерёмин А.М., Чередниченко А.И. Влияние свободной поверхности кристалла на характеристики дискретного бризера // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14, № 2. – С. 165–171.
15. Кистанов А.А., Мурзаев Р.Т., Дмитриев С.В., Дубинко В.И., Хижняков В.В. Движущиеся дискретные бризеры в моноатомном двумерном кристалле // Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2014. – Т. 99, вып. 6. – С. 403–408.
16. Кистанов А.А., Семенов А.С., Дмитриев С.В. О задании начальных условий для моделирования движущихся дискретных бризеров в моноатомном двумерном кристалле // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2014. – Т. 11, № 2. – С. 223-227.
17. Дмитриев С.В., Корзникова Е.А., Баимова Ю.А., Веларде М.Г. Дискретные бризеры в кристаллах // Успехи физических наук. – 2016. – Т. 186, №5. – С. 471-488.
18. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.T. Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // Reviews of Modern Physics. – 2006. – Vol. 78. – P. 13.
19. Rossler T., Page J.B. Optical creation of vibrational intrinsic localized modes in anharmonic lattices with realistic interatomic potentials // Physical Review B. – 2000. – Vol. 62. – P. 11460.
20. LAMMPS Molecular Dynamics Simulator [Офиц. сайт]. URL: <http://lammps.sandia.gov/> (дата обращения: 14.05.2018).
21. Dmitriev, S.V., Baimova, Y.A. Effect of elastic deformation on phonon spectrum and characteristics of gap discrete breathers in crystal with NaCl-type structure // Technical Physics Letters. – 2011. – Vol. 37(5). – P. 451–454.
22. Zhou X. W., Johnson R. A., and Wadley H. N. G. Misfit-energy-increasing dislocations in vapordeposited CoFe/NiFe multilayers // Physical Review B. – 2004. – Vol. 69. – P. 144113.
23. Ерёмин А.М., Захаров П.В., Старостенков М.Д. Статистические характеристики квази-бризера с мягким типом нелинейности в кристаллах стехиометрии A_3B // Химическая физика и мезоскопия. – 2016. - Т. 18, № 4. – С. 565-573.
24. Zakharov P.V., Eremin A.M., Starostenkov M.D., Lucenko I.S. Analysis of Statistical Characteristics of Quasi-Breather with Soft-Type of Nonlinearity in the Crystals of A_3B Stoichiometry // Key Engineering Materials. – 2017. – Vol. 743. – P. 86-90. – 2017.