

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

на заседании кафедры математики, физики, информатики

(протокол от 05 февраля 2024 г. № 5)

Заведующий кафедрой

математики, физики, информатики Г.С.



Шилинг

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1 ЦЕЛЬ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Теория функций действительного переменного - одна из обязательных дисциплин математических факультетов педагогических вузов, так как теория множеств и теория функций является основой для математического образования. Для изучения данной дисциплины требуется владение основами математического анализа и линейной алгебры.

Цель дисциплины - формирование систематических знаний о методах теории функций, её месте и роли в системе математических наук; расширение и углубление понятий: функция, мера, интеграл.

1.2 ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Студент должен знать: основные понятия курса (мощность, мера множества, счетные множества, метрические пространства и др.)

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» относится к вариативной части профессионального цикла (Б1.В.11).

Для освоения дисциплины «Теория функций действительного переменного» используются знания, умения, навыки, способы деятельности и установки, полученные и сформированные в ходе изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия». Освоение данной дисциплины является основой для последующего изучения учебных дисциплин «Теория функций комплексного переменного», «Математическая логика» и др., а также курсов по выбору студентов, содержание которых связано с готовностью студента углубить свои знания в области теории функций действительного переменного.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного» направлен на формирование следующих **компетенций**:

- Способен проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика (ПК-1).

Наименование и код индикаторов достижения компетенций:

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- ПК-1.1 - знание основы методики преподавания, основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий в области математики (З.1);
- ПК-1.2 - знание рабочей программы и методики обучения по математике (З.2);

уметь:

- ПК-1.3 - умение планировать и проводить учебные занятия по математике (У.1);
- ПК-1.4 - умение использовать методы и средства педагогического мониторинга, позволяющие оценить степень сформированности у детей качеств, необходимых для дальнейшего обучения и развития по математике (У.2);

владеть:

— ПК-1.5 - владеть формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, практические занятия и т.п. (В.1) базовыми идеями и методами теории функций действительного переменного.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр
		7
Аудиторные занятия (всего)	26	26
В том числе:		
Лекции (Л)	12	12
Практические занятия (ПЗ)	14	14
Семинары (С)		
Лабораторные работы (ЛР)		
Самостоятельная работа студентов (СРС) (всего)	46	46
В том числе:		
Подготовка к лекционным и практическим занятиям	6	6
Коллоквиум	10	10
Теоретический опрос	10	10
Индивидуальное домашнее задание	10	10
Подготовка к тестированию	10	10
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	Зачет	Зачет
Общая трудоемкость час зачетные единицы	72	72
	2	2

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Содержание разделов (модулей) дисциплины

Модуль №1

Мощность множества. Эквивалентные множества, мощность множества, правило сравнения мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна (без док-ва). Счетные множества и их основные свойства. Теоремы, доставляющие счетные множества. Счетность множества всех рациональных чисел и множества всех алгебраических чисел.

Несчетность множества всех действительных чисел. Континуум множества и их основные свойства. Теоремы, доставляющие континуум-множества.

Мощность множества всех подмножеств счетного множества

Мощность множества всех подмножеств непустого множеств. Следствие.

Модуль №2

Метрические пространства. Определение и примеры метрических пространств. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Основные понятия, относящиеся к множествам точек в метрическом пространстве.

Открытые и замкнутые множества, их основные свойства и связь между ними. Полные метрические пространства. Компактные множества.

Отображения в метрических пространствах, их предел, их непрерывность. Основные свойства непрерывных отображений компактов.

Теорема Банаха о сжимающем отображении и ее применение.

Модуль №3

Линейные нормированные пространства. Определение и примеры линейных пространств. Определение нормированного пространства, примеры нормированных пространств. Нормированное пространство как частный случай метрического пространства. Банахово пространство.

Скалярное произведение в линейном пространстве. Определение нормы через скалярное произведение. Гильбертово пространство.

Ортогональная и ортонормированная системы элементов в гильбертовом пространстве по ортонормированному базису.

Необходимое и достаточное условие того, что счетная ортонормированная система элементов образует базис гильбертова пространства.

Модуль №4

Множества на числовой прямой. Строение открытых и замкнутых множеств на числовой прямой. Совершенные множества, их структура. Канторово совершенное множество и его свойства.

Модуль №5.

Мера множества. Интеграл Лебега. Мера ограниченного множества по Лебегу. Свойства множеств, измеримых по Лебегу. Множество Кантора, его основные свойства. Измеримые функции и их свойства. Определение интеграла Лебега. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин				
		1	2	3	4	5
1	Теория функций комплексного переменного	+	+	+	+	+
2	Дифференциальные уравнения	+	+	+	+	+
3	История математики	+	+	+	+	+
4	Физика	+	+	+	+	+
5	Методика обучения математике	+				

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лек ции	Практ. зан.	В том числе в интер- активной форме		СРС	Всего
5 курс							
1	Мощность множества.	2	2	-		6	10
2	Метрические пространства.	2	2	-		10	14
3	Линейные нормированные пространства.	2	2	2 ч		10	14
4	Множества на числовой прямой	2	4	2 ч		10	16
5	Мера множества. Интеграл Лебега.	4	4	2 ч		10	18
	Зачёт	-	-	-		-	-
	Всего на 5 курсе:	12	14	6		46	72
В том числе, использование интерактивных форм, технологий				лекц 2	практ 4		

Лекции (12 часов)

№ лекции	Содержание лекции	Рекомендуемая литература
1	Эквивалентные множества, мощность множества, правило сравнения мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна (без док-ва). Счетные множества и их основные свойства. Теоремы, доставляющие счетные множества Счетность множества всех рациональных чисел и множества всех алгебраических чисел.	[1] глава I, §1, 2, 3 [2] глава I, §1, 2 [3] глава I, §1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [1] глава I, §3 [2] глава I, §3 [3] глава I, §8, 9, глава II, §1 [1] глава I, §1, 2, 3 [2] глава I, §1, 2 [3] глава I, §1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [1] глава I, §3 [2] глава I, §3 [3] глава I, §8, 9, глава II, §1
2	Несчетность множества всех действительных чисел. Континуум множества и их основные свойства. Теоремы, доставляющие континуум-множества. Мощность множества всех подмножеств счетного множества Мощность множества всех подмножеств непустого множеств. Следствие. Определение и примеры метрических пространств. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве. Основные понятия, относящиеся к множествам точек в метрическом пространстве. Открытые и замкнутые множества, их основные свойства и связь между ними. Полные метрические пространства. Компактные множества.	[1] глава I, §3 [3] глава II, §2, 3, 4 [1] глава I, §3 [1] глава I, §3 [3] глава II, §2, 3, 4 [1] глава I, §3 [1] глава II, §1 [2] глава II, §1, 2 [3] глава VII, §1, 2 [1] глава II, §2, 3, 6, 7 [2] глава II, §2, 3, 5, глава III, §1 [3] глава VII, §2, 3
3	Отображения в метрических пространствах, их предел, их непрерывность. Основные свойства непрерывных отображений компактов. Теорема Банаха о сжимающем отображении и ее применение.	[1] глава II, §3 [1] глава II, §4 [2] глава II, §4 [3] глава VII, §5, 6, 7, 8 [1] глава II, §3 [1] глава II, §4 [2] глава II, §4 [3] глава VII, §5, 6, 7, 8

№ лекции	Содержание лекции	Рекомендуемая литература
		[1] глава III, §1, 3 [2] глава VIII, §1 [3] глава X, §1 - 6 [1] глава III, § 4
4	Скалярное произведение в линейном пространстве. Определение нормы через скалярное произведение. Гильбертово пространство. Ортогональная и ортонормированная системы элементов в гильбертовом пространстве по ортонормированному базису. Необходимое и достаточное условие того, что счетная ортонормированная система элементов образует базис гильбертова пространства. Строение открытых и замкнутых множеств на числовой прямой.	[1] глава III, §1, 3 [2] глава VIII, §1 [3] глава X, §1 - 6 [1] глава III, § 4 [1] глава III, § 4 [2] глава VIII, § 2-5 [1] глава III, § 4 [1] глава II, §2 [2] глава III.
5	Мера ограниченного множества по Лебегу. Свойства множеств, измеримых по Лебегу. Множество Кантора, его основные свойства.	[1] глава V, § 1, 2, 3 [2] глава IV, [1] глава II, § 2 [2] глава IV. [1] глава V, § 4 [2] глава VII.
6	Измеримые функции и их свойства. Определение интеграла Лебега. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Сравнение интегралов Римана и Лебега.	1] глава II, § 2 [2] глава IV. [1] глава V, § 4 [2] глава VII. [1] глава V, § 5 [2] глава V. [1] глава V, § 5 [2] глава V

Практические занятия (14 часов)

№ практ. занятия	Темы практических занятий	Рекомендуемая литература
1	Эквивалентные множества. Установление взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств.	[4] №1а, б, 2б, 4а, 5, 27, 29, 33-43(н/ч), 56
2	Счетные множества и множества мощности континуума.	[4] № 62, 64, 66, 73, 77, 84, 101
3	Определение метрического пространства.	[4] № 112, 115, 117, 119, 121, 123
4	Основные понятия, относящиеся к множествам точек в метрических пространствах. Сходимость последовательностей точек в метрических пространствах.	[2] глава II, §2, упражнения на с.45-46(н/ч) Теоретическое занятие
5	Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров. Принцип сжатых отображений.	[2] глава II, §3, с.52 [2] глава II, §4, упражнения с.57
6	Линейное пространство. Нормированное линейное пространство. Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве.	[2] глава VIII, §1, с. 220(н/ч), §2 с.230(н/ч)
7	Свойства непрерывных функций на компактных замкнутых множествах. Интеграл Лебега.	[2] глава II, §5, упражнения на с.67

6. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторный практикум не предусмотрен.

7. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ РАБОТ (ПРОЕКТОВ)

Курсовые работы (проекты) не предусмотрены.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература

1. *Натансон, И.П.* Теория функций вещественной переменной [Текст]: учебник для ВУЗов/ И.П. Натансон. – 5-е изд. - СПб.: Лань, 2018. – 560 с.
2. *Треногин, В. А.* Функциональный анализ: учебник для вузов [Текст]: / В. А. Треногин. - 4-е изд., испр. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2017. - 488 с.
3. *Треногин, В. А.* Задачи и упражнения по функциональному анализу [Текст]: учебное пособие для вузов / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 240 с.

б) дополнительная литература

4. *Федоров, В. М.* Курс функционального анализа: учебник [Текст]: / В. М. Федоров. - СПб.: Лань, 2005. - 352 с. - Экземпляры: всего:1 - Ч.з.№2(1)
5. *Колмогоров, А.А.* Элементы теории функций и функционального анализа [Текст]: учебник / А.А. Колмогоров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1972. (33 экз)
6. *Очан, Ю.С.* Сборник задач и теорем по ТФДП [Текст]: учебное пособие/ Ю.С. Очан - М.: Просвещение, 1965. (82 экз)
7. *Соболев В.И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. -М.: Просвещение, 1968 (28 экз)
8. *Макаров И.П.* Дополнительные главы математического анализа. - М.: Просвещение, 1968 (40 экз)
9. *Теляковский С.А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. - М.: Наука, 1980 (4 экз.)
10. *Злобина, С.В* Математический анализ в упражнениях и задачах/Злобина С.В., Посицельская Л.Н., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 360 с.

в) программное обеспечение:

1. Работа на компьютере проводится с использованием лицензионных версий операционной системы Microsoft Windows XP Prof.
2. Для работы в библиотеке используется общевузовское лицензионное программное обеспечение «Ирбис-64», в составе которого входят АРМ «Каталогизатор», АРМ «Читатель», АРМ «Администратор», АРМ «Комплектатор», Web-Ирбис (CZ39.50)
3. Лицензионная программа АУП (Шахты) – комплекс «Электронные ведомости»

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1. Национальный цифровой ресурс Руконт. Режим доступа [http://www.rucont.ru/].
2. Университетская библиотека он-лайн. Режим доступа [http://www.biblioclub.ru/]. б) интернет-ресурсы 1. http://www.4p.ru 2. http://marketing.com.ru

д) Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине:

1. Организация самостоятельной работы студентов в учреждении высшего образования [Текст]: методические рекомендации / Сост.Е.Б. Манузина, Е.Э. Норина; Алтайская гос. Академия обр-я им. В.М. Шукшина. – Бийск: ФГБОУ ВПО «АГАО», 2014. – 84 с.

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование помещений для проведения всех видов учебной деятельности, предусмотренной учебным планом, в том числе помещения для самостоятельной работы, с указанием перечня основного оборудования, учебно-наглядных пособий и используемого программного обеспечения	Адрес (местоположение) помещений для проведения всех видов учебной деятельности, предусмотренной учебным планом (в случае реализации образовательной программы в сетевой форме дополнительно указывается наименование организации, с которой заключен договор)
Ауд. 106 Учебная физическая лаборатория Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Специализированная мебель. Технические средства обучения: компьютеры, оборудования для физики, наличие подключения к сети Интернет. Microsoft WindowsXP № лицензии 44039700, Microsoft Office - 2010 № лицензии 49379849 <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> <i>Консультант Плюс Договор №26 от 30.12.2022г ООО «Юркомп»</i> <i>Mathcad University Classroom Perpetual - 15 (сетевая версия) Код PKG-7517-EN PTC606002CD140-004</i> <i>Borland Developer Studio 2006 Professional AcademicEdition SKU: BDB0006WW1518A Borland Developer Studio 2006 Professional AcademicEdition (сетевая версия Живая математика 5.0</i> <i>Живая физика</i> <i>Лого Мир: Вероятности</i> <i>Виртуальные лаборатории: Электричество и магнетизм, Оптика и волны, Механика и Электродинамика</i> <i>Живая статистика SKU: BDB0006WWXX004, счет №АА 38643-00 от 26 августа 2008 ООО "Киrolан Лицензии № 201998313, № 20199834, № 201998319, № 201998311, № 201998310, № 20199835, № 20199838, № 201998312, № 20199839</i> <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: 2 ГИС, 7-Zip, Adobe License: Adobe Flash Player; Adobe Reader, AIMP3, BurnAware Free, CCleaner, Defraggler, Far Manager, Firebird, Foxit Reader, GNU (Geniral Public, sense или аналог) Version 2; Auda City; Blender; DB Designer; FileZilla; Inscapе; Open Office 4; Virtual Dub, VLC Media player; Oracle Virtual Box, GNU (Geniral Public License или аналог) Version 3, Gimp; K-LiteKodecPack, XAMPP, Google Chrome, HEFS, IBExpert, MyTestX, Notepad++, Pascal ABC, Денвер, ictnzor, InternetCensor, Non Vigual Desktop Access (NVDA) Айрен v2.3– редактор тестов, LibreOffice	Российская Федерация, 659300 г. Бийск, ул. Советская, 9, учебный корпус 3
Ауд. 126 Учебная физическая лаборатория Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Специализированная мебель. Технические средства обучения: стационарный компьютер,	Российская Федерация, 659300 г. Бийск, ул. Советская, 9, учебный корпус 3

школьное физическое оборудование, наличие подключения к сети Интернет. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> Microsoft WindowsXP № лицензии 44039700, Microsoft Office - 2010 № лицензии 49379849 <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: 2 ГИС, 7-Zip, Adobe License: Adobe Flash Player; Adobe Reader, AIMP3, BurnAware Free, CCleaner, Defraggler, Far Manager, Firebird, Foxit Reader, GNU (Geniral Public, cense или аналог) Version 2: Auda City; Blender; DB Designer; FileZilla; Inscapе; Open Office 4; Virtual Dub, VLC Media player; Oracle Virtual Box, GNU (Geniral Public License или аналог) Version 3, Gimp; K-LiteKodecPack, XAMPP, Google Chrome, HEFS, IBExpert, MyTestX, Notepad++, Pascal ABC, Денвер, ictnзор, InternetCensor, Non Vigual Desktop Access (NVDA) Айрен v2.3– редактор тестов, LibreOffice	
Ауд. 133 Компьютерный класс Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Специализированная мебель. Технические средства обучения: компьютеры, ноутбуки, наличие подключения к сети Интернет. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> ОС Windows 10 PRO, Microsoft Windows 10 Home Контракт № 19/6 – ЭА от 18.11.2019 Классе VR: Контракт № 19/2 – ЭА от 18.11.2019 <i>Movavi Video Editor Academic Edition 2020 Лицензионный договор на использование программного обеспечения от 26.02.2021г.</i> <i>Movavi Photo Editor 6 Лицензионный договор на использование программного обеспечения от 26.02.2021г</i> <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СУБД Ред Базы Данных Соглашение № 441/11-21У от 30.11.21г. ООО «Ред Софт» Акт приема передачи прав 06.12.2021г. Соглашение о конфиденциальности №440/11-21К Программный продукт ГЕМБАФЕЙС Соглашение № 441/11-21У от 30.11.21г. ООО «Ред Софт» Акт приема передачи прав 25.02.2022г. Соглашение о конфиденциальности №440/11-21К СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: 2 ГИС, 7-Zip, Adobe License: Adobe Flash Player; Adobe Reader, AIMP3, BurnAware Free, CCleaner, Defraggler, Far Manager, Firebird, Foxit Reader, GNU (Geniral Public, cense или аналог) Version 2: Auda City; Blender; DB Designer; FileZilla; Inscapе; Open Office 4; Virtual Dub, VLC Media player; Oracle Virtual Box, GNU (Geniral Public License или аналог) Version 3, Gimp; K-LiteKodecPack, XAMPP, Google Chrome, HEFS, IBExpert, MyTestX, Notepad++, Pascal ABC, Денвер, ictnзор, InternetCensor, Non Vigual Desktop Access (NVDA) Айрен v2.3– редактор тестов, LibreOffice	Российская Федерация, 659300 г. Бийск, ул. Советская, 9, учебный корпус 3
Ауд. 154-167 Технопарк универсальных педагогических компетенций Комплект учебной мебели, флипчарт. Технические средства: Атомные спектры двуэлектронных систем He, Hg, камера для триногулярных микроскопов, комплект для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации, программно-аппаратный комплекс топографического изучения строения организма человека, ресурсный набор анализа материалов для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации, ресурсный набор рентгеноструктурный анализ материалов для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации, съёмная рентгеновская трубка Mo tube, съёмная рентгеновская трубка W tube, тринокулярный микроскоп для преподавателя 1000х, предметный столик, план-ахроматическая "бесконечная оптика", лабораторный набор по генетике и материалы , трис-обратный буфер для электрофореза, шлем виртуальной реальности профессиональный HTC Vive Cosmos, шлем виртуальной реальности профессиональный HTC Vive Focus Plus, очки дополненной реальности Erpson, камера 360 профессиональная Insta360 Pro, камера 360 любительская Insta360 One, стационарный персональный компьютер Parus 2021, интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> Интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением ПО Ikar Notebook Контракт 29-ЭА от 12.11.21 ООО «РуДисплейс» Программно-аппаратный комплекс топографического изучения строения организма ПО 3datlas Контракт 12-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» Оборудование для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации (рентгенография) Контракт 13-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» Профессиональные оптические приборы ПО TouP Cam Контракт 14-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» Учебно-демонстрационное оборудование (Цифровая лаборатория по физике ПО Releon Lite 3.63) Контракт 15-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» «VR» - оборудование Контракт 22-ЭА от 28.10.2021 ИП Кузьменко Денис Евгеньевич <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: Adobe Reader, 7-Zip, Google Chrome, Far Manager,	Российская Федерация, 659333, Алтайский край, г. Бийск, ул. Владимира Короленко, д. 53

Libre Office Ауд. 1-102 Кабинет для проведения занятий технологической направленности Комплект учебной мебели. Технические средства: интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением, ноутбук, образовательный конструктор с комплектом датчиков, образовательный набор по механике, мехатронике и робототехнике (6 комплектов), образовательный набор по электронике, электромеханике и микропроцессорной технике, образовательный набор для изучения многокомпонентных робототехнических систем и манипуляционных роботов, комплект для изучения операционных систем реального времени и систем управления автономных мобильных роботов, четырёхосевой учебный робот-манипулятор с модульными сменными насадками, комплект полей и соревновательных элементов, образовательный модуль для углубленного изучения механики, мехатроники и САУ, лаборатория исследования окружающей среды, альтернативных источников энергии, материалов и инженерных конструкций, автономный робот манипулятор с колесами всенаправленного движения, базовый робототехнический набор, ресурсный робототехнический набор, датчик цвета базового робототехнического набора, ультразвуковой датчик базового робототехнического набора, зарядное устройство, образовательный набор по изучению технологий реверсивного инжиниринга, образовательный набор по изучению аддитивных технологий и быстрого прототипирования, станок лазерной резки с числовым программным управлением и системой фильтрации воздуха. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> ПО Microsoft Win 10 Professional 32/64 bit SP2 Only USB RS Box Контракт 14/1 от 03.12.21 ООО «Парус Плюс» Microsoft Office - 2019 (коробочная версия) Договор пожертвования от 06.05.2022 Цифровые лаборатории по физике, химии, биологии ПО Releon Camera 1.1, Releon Lite 3.63 Контракт 51-ЭА от 30.11.21 ООО «Константа» Оборудование технологического профиля (Роботы, 3d сканер, 3d принтер) Контракт 7-ЭА от 23.09.21 ООО «Константа» Учебно-исследовательские лаборатории биосигналов и нейротехнологий ПО BiTronies Studio 5.1.10 Контракт 5-ЭА от 23.09.21 ООО «Спецкомплект» Цифровые микроскопы ПО TouP Cam Контракт 4-ЭА от 20.09.21 ИП Вебер Ольга Сергеевна Интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением ПО Ikar Notebook Контракт 29-ЭА от 12.11.21 ООО «Рудисплекс» ПАК NITRINO Контракт №55-ЭА от 30.11.2021 ООО «Парус Плюс» Станок лазерной резки с ЧПУ и системой фильтрации воздуха (облачный режим www.gweikecloud.com) Контракт №10 от 18.10.2021г. ООО «УК «Восточная Сибирь» Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380 от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370) СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: Adobe Reader, 7-Zip, Google Chrome, Far Manager, Libre Office	Российская Федерация, 659333, Алтайский край, г. Бийск, ул. Владимира Короленко, д. 53
--	---

10. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

10.1 Методические рекомендации для преподавателей

Основными разделами курса ТФДП в педагогическом вузе традиционно являются: мощность множества, счётные и несчётные множества, строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой, мера Лебега, множества и функции, измеримые по Лебегу, интеграл Лебега, понятие метрического пространства, полные метрические пространства, ряды Фурье в произвольном Гильбертовом пространстве.

Основными формами работы являются лекции, практические занятия и самостоятельная работа студентов, используются также интерактивные формы (презентации, проблемные лекции, диспут).

Текущий контроль в течение семестра осуществляется посредством оценки выполнения еженедельных домашних работ, защит индивидуальных заданий, а также при проведении аудиторных контрольных работ и тестирования.. Итоговый контроль предполагает зачёт в конце 7 семестра.

10.2 Методические рекомендации для студентов

В конце 7 семестра студент должен знать основные понятия, определения и теоремы, а также уметь решать базовые задачи по разделам: метрические пространства,

мощность множества, линейное нормированное пространство, множества на числовой прямой, мера множества, интеграл Лебега.

11. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Фонд оценочных средств разработан для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «**Теория функций действительного переменного**» и входит в состав основной образовательной программы по направлению подготовки: 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (профиль «Математика и Информатика») (квалификация «Бакалавр»), реализуемой при подготовке обучающихся в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В.М. Шукшина». Фонд оценочных средств предназначен для проверки сформированности компетенций, заявленных в программе дисциплины «**Теория функций действительного переменного**» в соответствии с учебным планом 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (профиль «Математика и Информатика») (квалификация «Бакалавр»).

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

- Способен проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика (ПК-1).

Компетенции, этапы	Индикаторы	Оценочные средства
ПК-1 7 этап	Знать: — ПК-1.1 - знание основы методики преподавания, основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий в области математики (З.1); — ПК-1.2 - знание рабочей программы и методики обучения по математике (З.2);	Практико-ориентированное задание: коллоквиум, практическая работа, контрольная работа.
	Уметь: — ПК-1.3 - умение планировать и проводить учебные занятия по математике (У.1); — ПК-1.4 - умение использовать методы и средства педагогического мониторинга, позволяющие оценить степень сформированности у детей качеств, необходимых для дальнейшего обучения и развития по математике (У.2);	
	Владеть: — ПК-1.5 - владеть формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, практические занятия и т.п. (В.1) базовыми идеями и	

	методами теории функций действительного переменного.	
--	--	--

Компетенция ПК-1 с указанием этапа формирования в процессе освоения образовательной программы

Компетенция ПК-1 (способен проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика) формируется на седьмом этапе (4 курс) формирования компетенций.

Компетенция ПК-1 формировалась в процессе изучения данной дисциплины и продолжит формироваться на следующих курсах в процессе изучения других учебных дисциплин, прохождения практик и итоговой государственной аттестации (Защита выпускной квалификационной работы).

Типовое контрольное задание для оценки сформированности данной компетенции направлено на демонстрацию готовности проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика.

1. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

**ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО»**
(контрольное задание на этапе формирования компетенции)

1. Эквивалентные множества их свойства. Мощность множества, сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
2. Теорема о существовании множеств сколь угодно больших мощностей.
3. Счетные множества и их свойства.
4. Счетность множества всех рациональных чисел и множества всех алгебраических чисел.
5. Теоремы о бесконечных множествах. Характеристическое свойство бесконечных множеств.
6. Несчетность множества всех действительных чисел отрезка $[0;1]$ и множества действительных чисел.
7. Теоремы о континуум множествах.
8. Определение и примеры метрических пространств. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве.
9. Основные понятия, относящиеся к множествам точек метрического пространства.
10. Открытые и замкнутые множества, их основные свойства и связь между ними.
11. Полные метрические пространства, их свойства.
12. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха и ее применение.
13. Определение и примеры линейных пространств. Линейные нормированные пространства, примеры. Нормированное пространство как частный случай метрического пространства. Банахово пространство.
14. Линейные пространства со скалярным произведением. Определение нормы через скалярное произведение. Гильбертово пространство.
15. Линейные операторы и функционалы, их свойства.
16. Строение открытых и замкнутых множеств на числовой прямой.
17. Канторово совершенное множество и его свойства.
18. Мера ограниченного множества по Лебегу. Свойства множеств, измеримых по Лебегу.
19. Множество Кантора, его основные свойства.
20. Измеримые функции и их свойства.

21. Определение интеграла Лебега. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
22. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

2. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Коллоквиум

(контрольное задание на этапе формирования компетенции)

Программа коллоквиума №1

1. Эквивалентные множества и их свойства. Мощность множества, сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
2. Теорема о существовании множеств сколь угодно больших мощностей.
3. Счетные множества и их свойства.
4. Счетность множества всех рациональных чисел и множества всех алгебраических чисел.
5. Теоремы о бесконечных множествах. Характеристическое свойство бесконечных множеств.
6. Несчетность множества всех действительных чисел отрезка $[;1]$ и множества действительных чисел.
7. Теоремы о континууме множеств.

Программа коллоквиума №2

1. Определение и примеры метрических пространств. Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве.
2. Основные понятия, относящиеся к множествам точек метрического пространства.
3. Открытые и замкнутые множества, их основные свойства и связь между ними.
4. Полные метрические пространства, их свойства.
5. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха и ее применение.

3. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Теоретическое занятие

(контрольное задание на этапе формирования компетенции)

Вопросы для теоретического занятия (модуль №3 и №4)

1. Определение и примеры линейных пространств. Линейные нормированные пространства, примеры. Нормированное пространство как частный случай метрического пространства. Банахово пространство.
2. Линейные пространства со скалярным произведением. Определение нормы через скалярное произведение. Гильбертово пространство.
3. Линейные операторы и функционалы, их свойства.
4. Строение открытых и замкнутых множеств на числовой прямой.
5. Канторово совершенное множество и его свойства.

Вопросы для теоретического занятия (модуль №5)

1. Мера ограниченного множества по Лебегу. Свойства множеств, измеримых по Лебегу.

2. Множество Кантора, его основные свойства.
3. Измеримые функции и их свойства.
4. Определение интеграла Лебега. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.
5. Сравнение интегралов Римана и Лебега.

4. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Контрольная работа
(контрольное задание на этапе формирования компетенции)

ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Методические указания по выполнению контрольной работы

Одной из задач исследования является помощь преподавателю, читающему курс «Теория функций действительного переменного», в составлении вариантов контрольной работы, а также на их основе подготовки типового варианта контрольной работы с решением и указаниями.

Контрольная работа по дисциплине «Теория функций действительного переменного» состоит из двух частей.

Первая часть охватывает темы: «Множества» и «Мощность множества». Основная часть заданий отведена операциям над множествами: дополнения, пересечения, объединения конечного и бесконечного числа элементов множеств. Восьмое задание рассчитано на понимание студентами (будущими учителями) этапа завершения решения уравнений, неравенств, где в ответе нужно представлять либо объединение полученных решений, либо их пересечение.

Некоторые задания рассматривают отображения: «в», «на», взаимно однозначное. Эти отображения задаются не только графически, но и аналитически. В тринадцатой задаче студентам предлагается самостоятельно выбрать способ задания отображения. Особое внимание в контрольной работе уделяется взаимно однозначному соответствию, понимание которого необходимо в дальнейшем при прохождении тем: «Счетное множество» и других.

Последнее задание рассчитано на нахождение мощности множеств. Большая часть подпунктов этого задания на применение основных теорем о счетных множествах. Также имеются задания, где множество имеет мощность континуум.

Вторая часть называется «Метрические пространства». Первые два задания на проверку аксиом метрического пространства.

Следующие задания касаются основных понятий теории метрических пространств, в частности, замкнутых и открытых множеств, а также ε -окрестности точки метрического пространства.

В последнем задании требуется найти расстояние между двумя точками метрического пространства.

Имеются также задачи на сжимающие отображения, применение теоремы Банаха. В контрольной работе имеются задачи на нормирование метрических пространств.

Проработка подготовленных вариантов показала, что необходимо четко указать в каких заданиях студенту необходимо дать только ответ, не предоставляя решения, а где подробно обосновать свое решение, воспроизводить ли данные рисунки и другое.

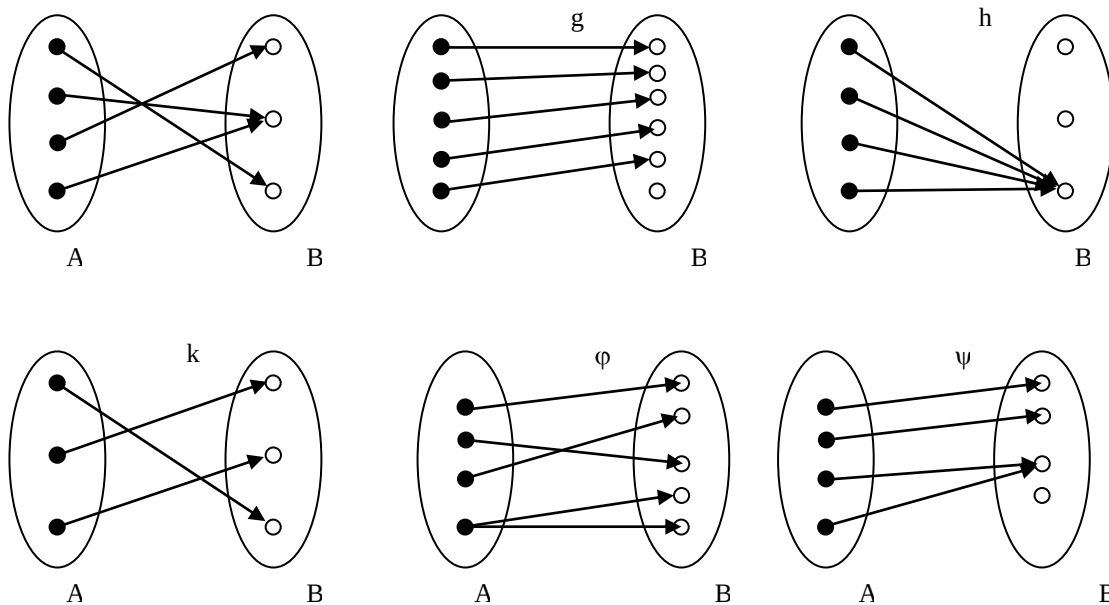
При выполнении заданий № 2, 4, 5, 6, 7, 10 из первой части контрольной работы требуется записать только ответ, не оформляя решения. Задания № 9, 11, 12 требуют подробного и аргументированного ответа.

Варианты контрольной работы

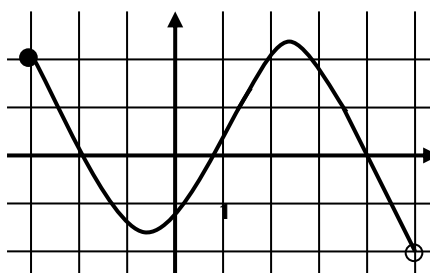
Вариант 1

Часть I. Множество. Мощность множества

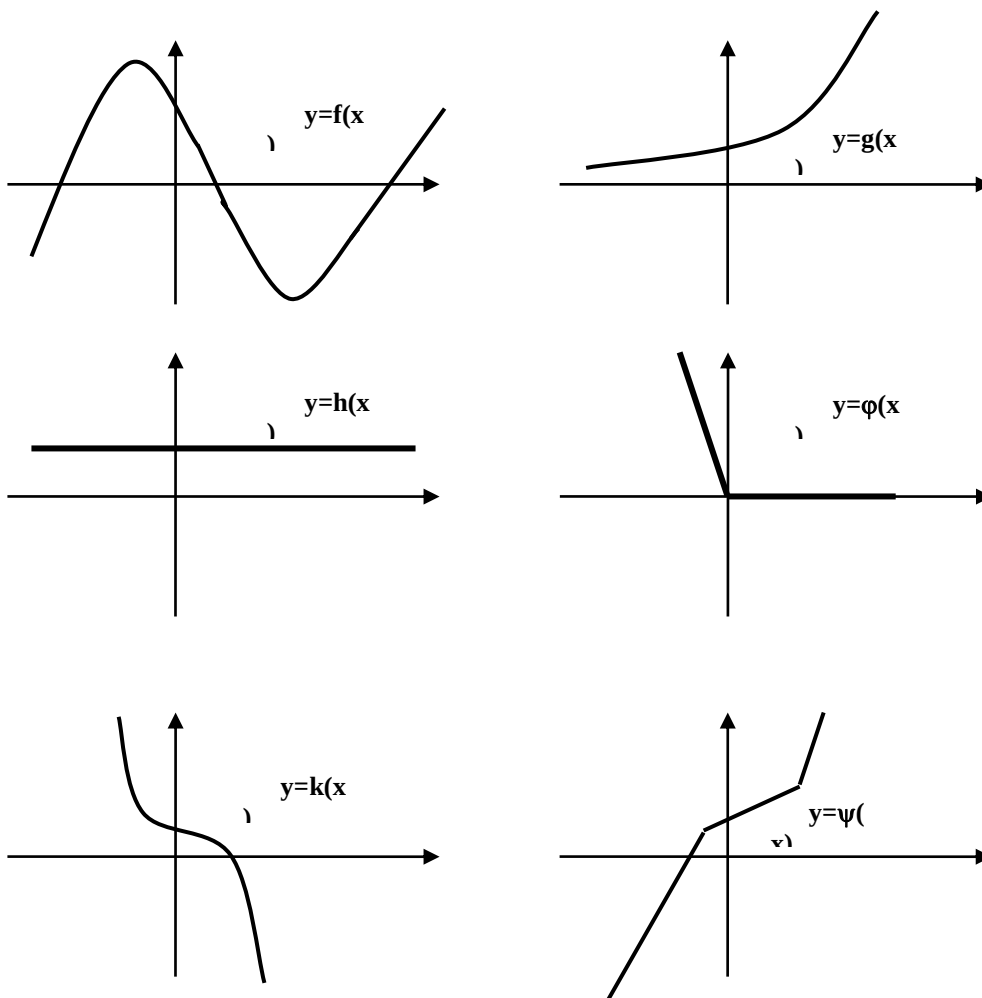
1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.
 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3) \cdot (x^2 - 1) = 0\}.$
2. Установите, какая из двух записей верна:
а) $\{1;2\} \in \{1;2; \{1;2;3\}\}$ или $\{1;2\} \subset \{1;2; \{1;2;3\}\};$
б) $\{1;2\} \in \{1;2; \{1;2\}\}$ или $\{1;2\} \subset \{1;2; \{1;2\}\}.$
3. Пусть $A = (-1;2]$, $B = [1;4)$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$. Изобразите их на числовой оси.
4. Приняв отрезок $T = [0;1]$ за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение множества $\{0;1\}$.
5. A – множество всех четырехугольников на плоскости, B – множество квадратов. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Для заданного семейства множеств $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}, n \in \mathbb{N}$, найдите $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{a, b, c, d\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Пусть A, B и C соответственно множества корней алгебраических уравнений $P(x) = 0, Q(x) = 0, R(x) = 0$, где $P(x), Q(x), R(x)$ – многочлены. Каково множество корней уравнения $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) = 0$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимно однозначное отображение.



10. Функция задана графически. Отображение каких множеств осуществляет эта функция?



11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 2) $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$; 3) $y = x^2 - x$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. A – множество функций, непрерывных на отрезке $[0, 2]$, $R = (-\infty, +\infty)$. Задайте отображение A в R , R в A .

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{1; 3; 9; 12; 15; \dots\}$;

b) $B = \left\{(-1)^n \frac{1}{2^n} \mid n \in N\right\}$;

c) C – множество треугольников плоскости, координаты вершин которых рациональны;

d) $D = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 4\}$.

Часть II. Метрические пространства

1. Дано множество действительных чисел R . Является ли метрикой в R функция $\rho(x, y) = x^3 - y^3$?
2. Докажите, что множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с расстоянием $\rho(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ - есть метрическое пространство.
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S(a, r) = (2; 4, 26)$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = 2x + 1$ в метрическом пространстве $C[-1; 2]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = 2,42$ и $x_2 = -3,4$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (-1; 2)$ и $x_2 = (0, -2)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (0; 1; 2)$ и $x_2 = (-1; 0; 1)$.
 - г) $C_L[0; 2]$; $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = 3x + 4$.

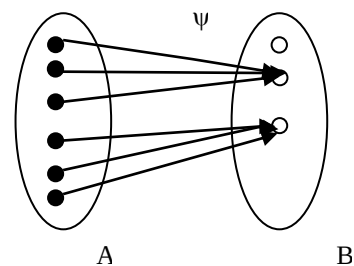
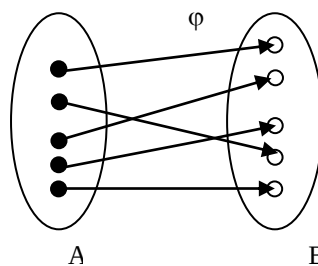
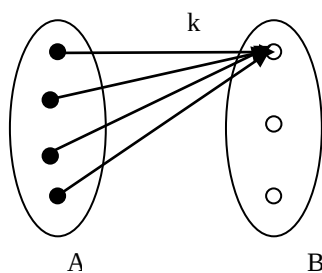
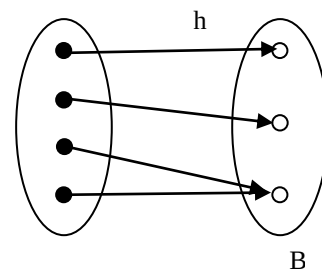
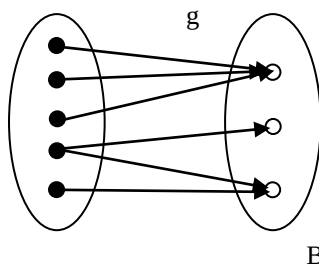
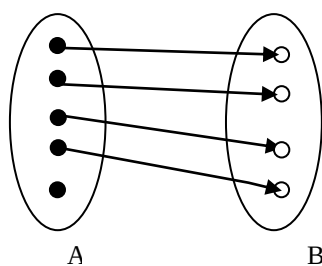
Вариант 2

Часть I. Множество. Мощность множества

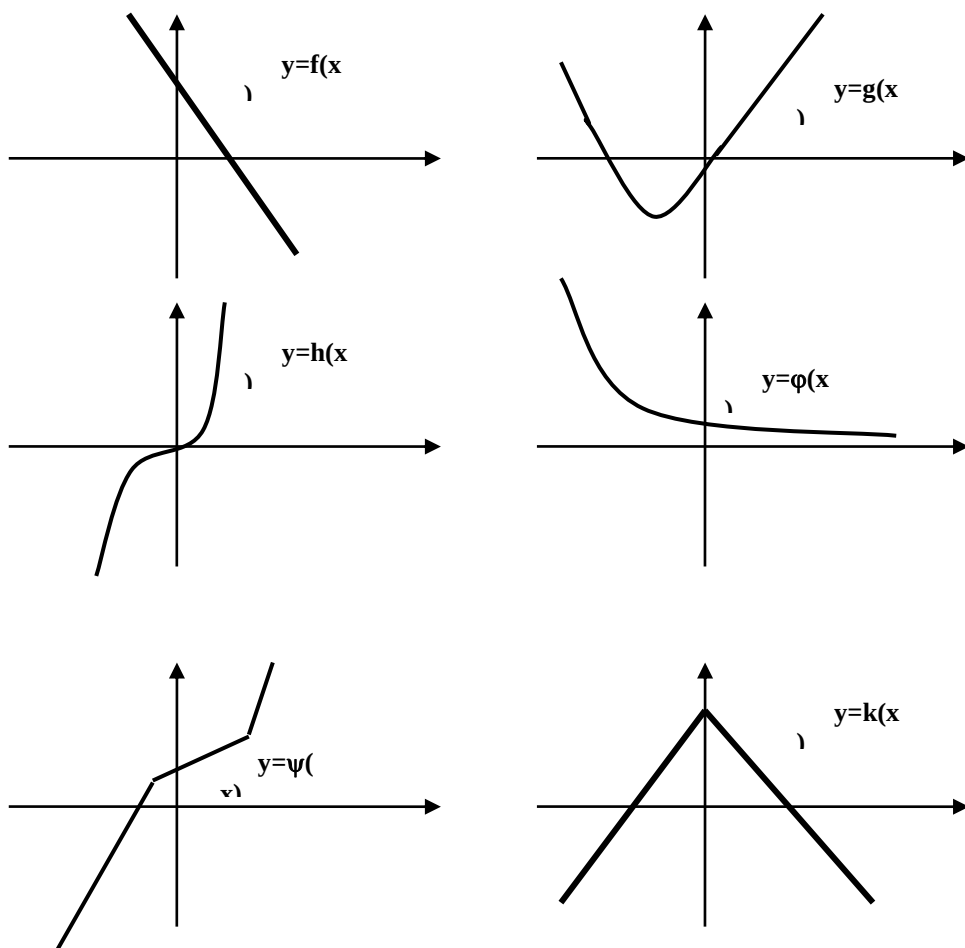
1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.
 $A = \{x \in R \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.
2. Установите, какая из двух записей верна:
 - а) $\{0; 1\} \in \{0; 1; \{0; 1; 2\}\}$ или $\{0; 1\} \subset \{0; 1; \{0; 1; 2\}\}$;
 - б) $\{0; 1\} \in \{0; 1; \{0; 1\}\}$ или $\{0; 1\} \subset \{0; 1; \{0; 1\}\}$.
3. Перечислите все элементы множеств $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$, если $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 20 = 0\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$.
4. Приняв отрезок $T = [-2; 3]$ за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение интервала $(-2; 3)$.
5. A – множество всех треугольников на плоскости, B – множество равнобедренных треугольников. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Для заданного семейства множеств $A_n = \{3n - 2; 3n - 1\}$, $n \in N$, найдите

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ и } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Выразите множество действительных корней алгебраического уравнения $P(x) = 0$, если известны множества $X = \{x \mid P(x) > 0\}$ и $Y = \{x \mid P(x) < 0\}$.
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = x^2$ отображает множество $F = [-1; 2]$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = e^x$; 2) $y = 2 - x$; 3) $y = x^2 + 3$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. A – множество жителей г.Бийска, R – множество действительных чисел. Задайте отображение A в R , R в A , A на R .

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots\}$;

b) $B = \left\{ (-1)^n \frac{1}{2} \mid n \in N \right\}$;

c) C – множество треугольников плоскости, координаты вершин которых целые числа;

d) $D = \{x \in R \mid 0 \leq x < 5\}$.

Часть II. Метрические пространства

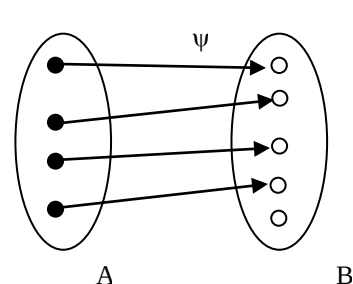
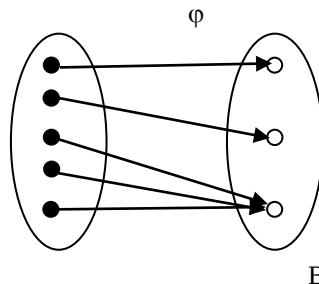
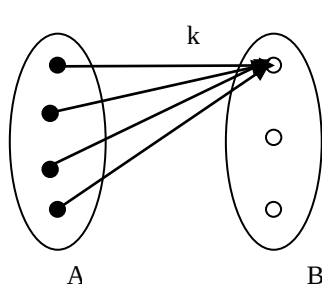
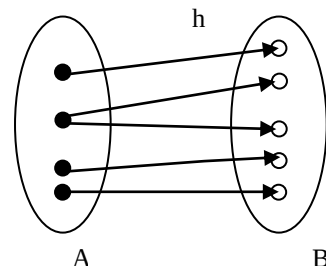
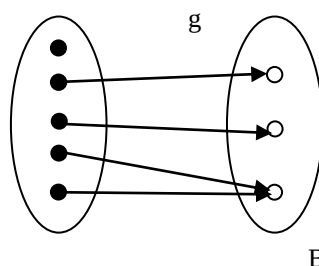
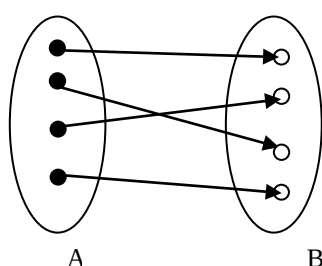
1. Дано множество действительных чисел R . Является ли метрикой в R функция $\rho(x, y) = |\cos(x - y)|$?
2. Докажите, что множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с расстоянием $\rho(x(t), y(t)) = \int_b^a |f(x) - g(x)| dx$, образуют метрическое пространство.
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S[a, r] = [-2; 0,36]$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = x^2 - x$ в метрическом пространстве $C[-1; 2]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = -2,31$ и $x_2 = 1,75$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (2; 1)$ и $x_2 = (0, -3)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (1; -1; 0)$ и $x_2 = (2; -1; 2)$.
 - г) $C_L[0; 2]$; $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = 3x + 4$.

Вариант 3

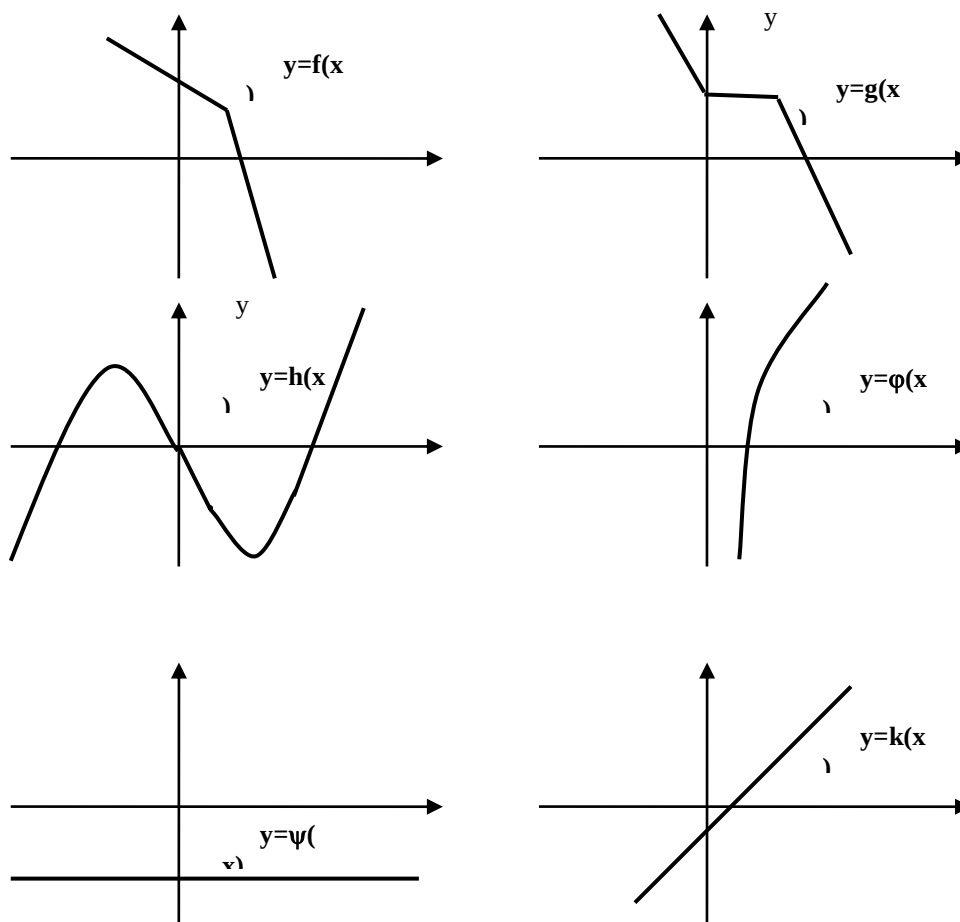
Часть I. Множество. Мощность множества

1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.
$$A = \left\{ x \in R \mid x + \frac{1}{x} \leq 2 \text{ и } x > 0 \right\}.$$
2. Верна ли запись:
 - а) $\{-1; 1\} \in \{-1; 1; \{-1; 0; 1\}\}$;
 - б) $\{-1; 1\} \subset \{-1; 1; \{-1; 0; 1\}\}$
 - в) $\{-1; 1\} \in \{-1; 1; 0; \{-1; 0; 1\}\}$;
 - г) $\{-1; 1\} \subset \{-1; 0; \{-1; 1\}\}$;
 - д) $\{-1; 1\} \subset \{-1; 0; 2\}$.
3. Даны множества $A = [2; 5]$ и $B = (3; 6)$. Перечислите все элементы множеств $A + B, A \cdot B, A \setminus B$ и $B \setminus A$ и изобразите их на числовой оси.

4. Приняв отрезок $T = [0;1]$ за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение интервала $(0,25;0,5)$.
5. A – множество параллелограммов на плоскости, B – множество ромбов. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Для заданного семейства множеств $A_n = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}\right\}, n \in N$, найдите $\bigcup_{n \in N} A_n$ и $\bigcap_{n \in N} A_n$.
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{2;4;6;8\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Пусть A, B и C соответственно множества корней алгебраических уравнений $P(x)=0, Q(x)=0, R(x)=0$, где $P(x), Q(x), R(x)$ – многочлены. Каково множество корней системы уравнений $\begin{cases} P(x)=0 \\ Q(x) \cdot R(x)=0 \end{cases}$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B, A на B , взаимные однозначные отображения.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = |x|$ отображает множество $F = \{x \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = -7x + 1$; 2) $y = \log_3 x$; 3) $y = x^3 - x^2$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. A – множество студентов 161 группы ФМФ, сдававших экзамен по математическому анализу, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ – множество оценок. Поставим в соответствие каждому студенту полученную им оценку (f) и обратно – каждой оценке получивших ее студентов (φ). Задано ли отображение: а) $f : A \rightarrow B$; б) $\varphi : B \rightarrow A$?

14. Укажите мощность данных множеств:

а) $A = \{1; 5; 25; 125; 625; \dots\}$;

б) $B = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$;

- с) C – множество четырехугольников плоскости, координаты вершин которых рациональны;

д) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$.

Часть II. Метрические пространства

1. Пусть M – множество всех населенных пунктов на левом берегу реки Бии. Расстояние $\rho(x, y)$ от пункта x до пункта y будем измерять временем движения от x до y катера, имеющего соответствующую скорость 40 км/ч. Образуется ли M метрическое пространство?

2. Будет ли двумерное пространство R^2 метрическим пространством, если расстояние между точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ определить так:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S[a, r] = [5, 24; 6, 2]$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?

4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = \log_2 x$ в метрическом пространстве $C[1; 4]$.

5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:

а) E_1 ; $x_1 = 2,3$ и $x_2 = -5,62$.

б) E_2 ; $x_1 = (2; 7)$ и $x_2 = (-1, -3)$.

в) E_3 ; $x_1 = (1; 2; 3)$ и $x_2 = (-1; -2; -3)$.

г) $C^1[0; 2]$; $f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = 3x + 4$.

Вариант 4

Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.

$$A = \{x \in N \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}.$$

2. Установите, какая из двух записей верна:

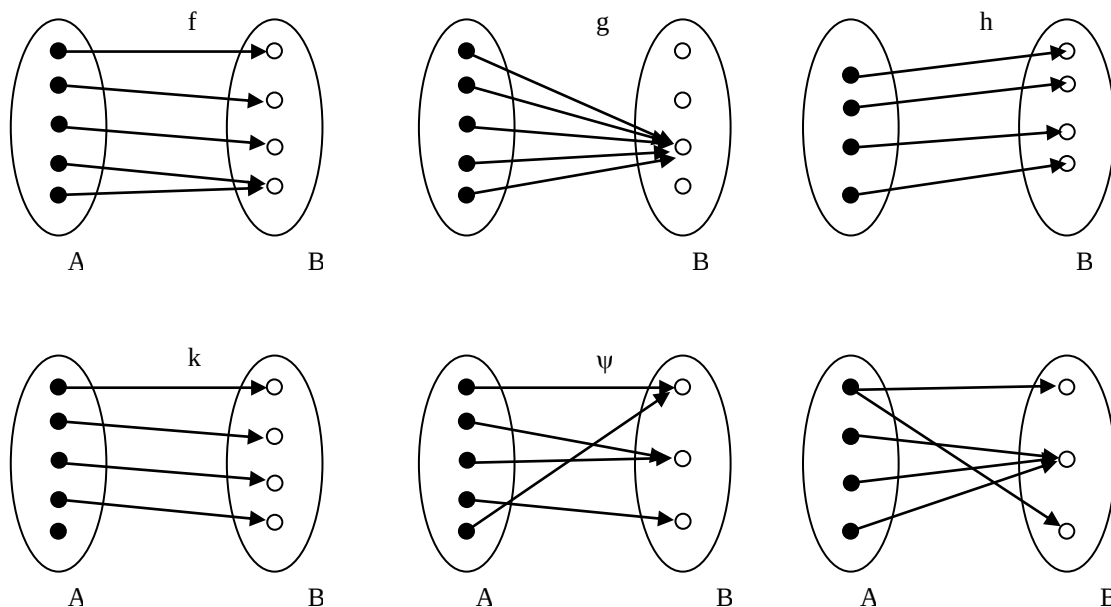
а) $\{1; 2; 3\} \in \{1; 2; 3; \{1; 2; 3\}\}$ или $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; \{1; 2; 3\}\}$;

б) $\{1; 2; 3\} \in \{1; 2; \{1; 2; 3\}\}$ или $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; \{1; 2; 3\}\}$.

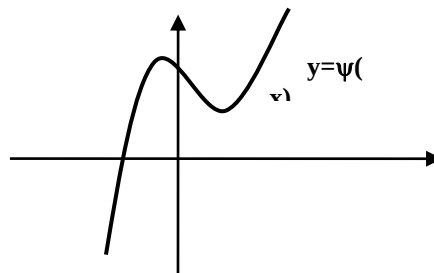
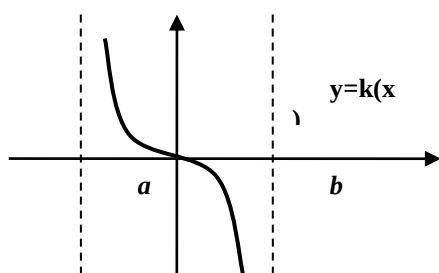
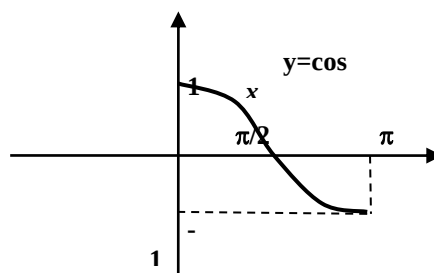
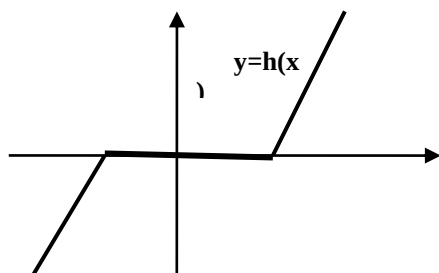
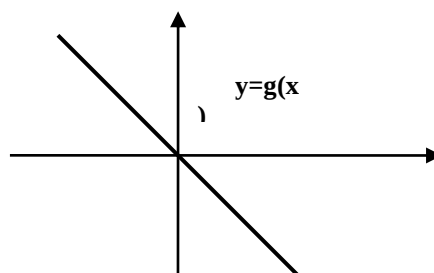
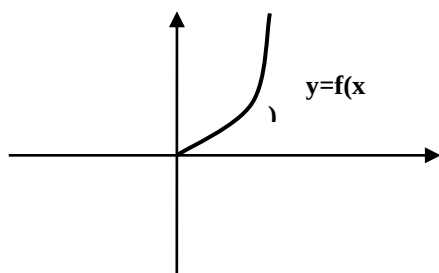
3. Пусть множество A состоит из юношей данной группы, а B – из девушек той же группы. Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Рассмотрите также случаи, когда A или B пустое множество.

4. Приняв отрезок $T = [0; 1]$ за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение полуинтервала $(0; 0,5]$.

5. A – множество равнобедренных треугольников на плоскости, B – множество равносторонних треугольников. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Найдите объединение и пересечение множеств $Y_n = \left(0; 1 - \frac{1}{2n}\right)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$.
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{0; 1; -1; 2\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Выразите множество решений уравнения $2\sin^2 x = 1$ через множества решений уравнений: $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = \frac{x}{2x-1}$ отображает множество $F = (0; 1)$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^{2x}$; 2) $y = 4x + 2$; 3) $y = 4x^2 + 2x$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. Назовите простейшие элементарные функции, которые осуществляют отображения R в R , R на R .

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{2n - 3 \mid n \in N\}$;

b) $B = \left\{(-1)^n \frac{1}{5^n} \mid n \in N\right\}$;

c) C – множество окружностей плоскости, координаты центра которых рациональны;

d) $D = \{x \in R \mid 2 < x < 7\}$.

Часть II. Метрические пространства.

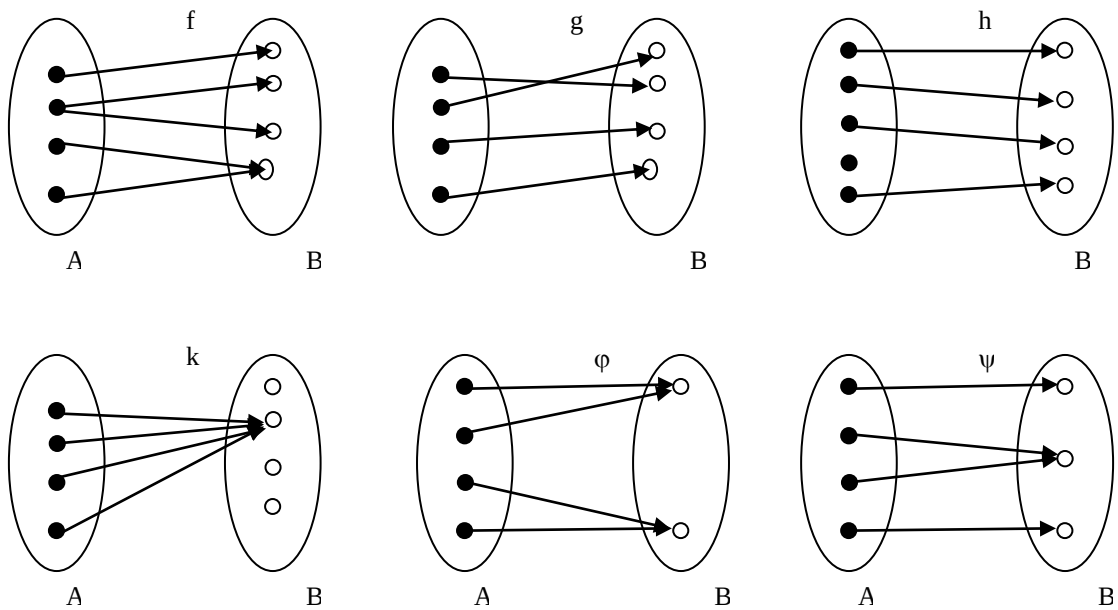
1. Является ли метрикой на прямой R функция $\rho(x, y) = |x - 2y|$?
2. Докажите, что n -мерное пространство R^n является метрическим, если расстояние между точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определить равенством
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S(a, r) = (-2, 63; 0)$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = \sin x$ в метрическом пространстве $C[0; \pi]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = -2,53$ и $x_2 = 0,81$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (2; -1)$ и $x_2 = (0; 5)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (-3; 2; -2)$ и $x_2 = (1; 0; 2)$.
 - г) $C^1[0; 1]$; $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x + 3$.

Вариант 5

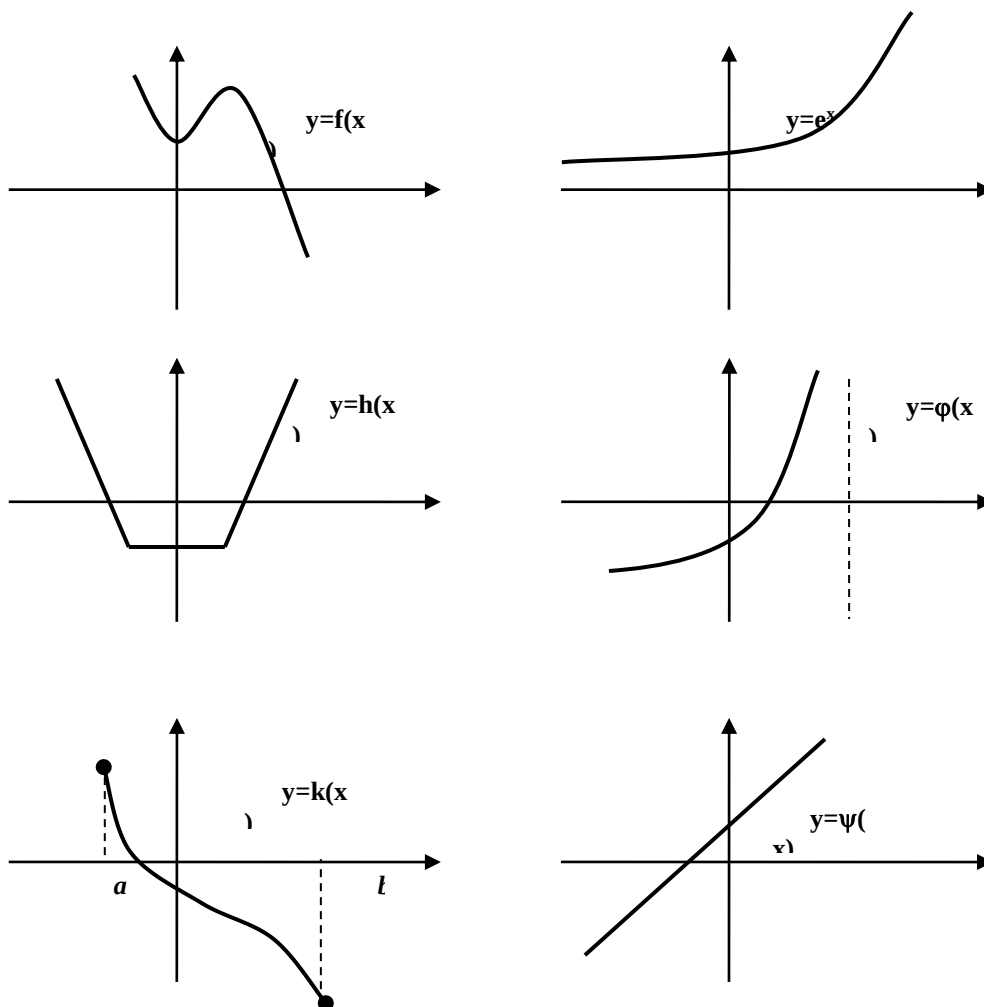
Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.
$$A = \left\{ x \in Z \mid \frac{1}{4} \leq 2^x \leq 5 \right\}.$$
2. Установите, какая из двух записей верна:
 - а) $\{-1; 1\} \in \{-1; 0; 1; \{-1; 0\}\}$ или $\{-1; 1\} \subset \{-1; 0; 1; \{-1; 0\}\}$;
 - б) $\{-1; 1\} \in \{-1; 0; 1; \{-1; 1\}\}$ или $\{-1; 1\} \subset \{-1; 0; 1; \{-1; 1\}\}$.
3. Даны множества $A = [-3; 2]$ и $B = [0; 4]$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$. Изобразите их на числовой оси.
4. Приняв все действительные числа R за универсальное множество, найдите дополнение множества иррациональных чисел I .
5. A – множество ромбов на плоскости, B – множество квадратов. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.

6. Найдите объединение и пересечение множеств $X_n = \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{c, d, e, f\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Пусть A , B и C соответственно множества корней алгебраических уравнений $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$, $R(x) = 0$, где $P(x), Q(x), R(x)$ - многочлены. Каково множество корней системы уравнений $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \\ R(x) = 0 \end{cases}$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = \sqrt{x - x^2}$ отображает множество $F = (0; 1)$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = x^3 + 3$; 2) $y = \log_{0,5} 2x$; 3) $y = \sin x$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. A – множество функций, дифференцируемых на отрезке $[0,1]$. Задайте отображение A в $[0,1]$, $[0,1]$ в A .

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\};$

b) $B = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\};$

c) C – множество непересекающихся интервалов на числовой прямой;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq 3\}.$

Часть II. Метрические пространства.

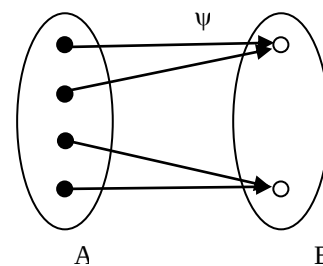
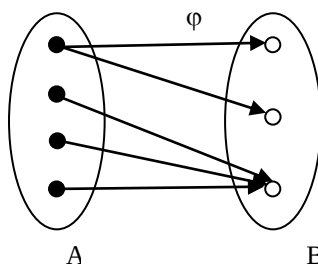
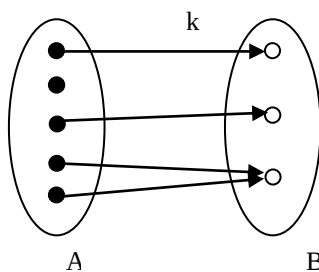
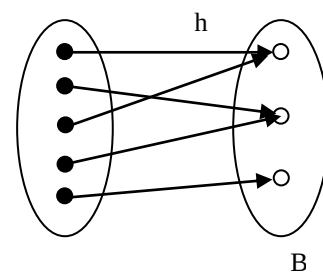
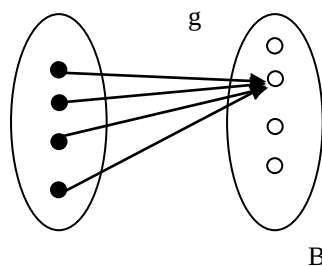
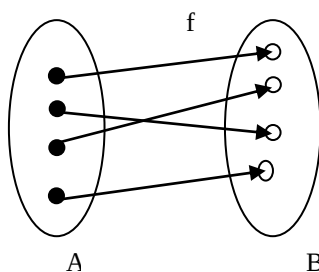
1. Является ли метрикой на прямой R функция $\rho(x, y) = |\sin(2x - y)|$?
2. Докажите, что n -мерное пространство R^n является метрическим, если расстояние между точками $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определить равенством
$$\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, \dots, n\}.$$
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S(a, r) = (-5, 62; -3)$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = 2^x - 1$ в метрическом пространстве $C[0; 2]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = 0,72$ и $x_2 = -3,8$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (2; 1; 0)$ и $x_2 = (1; 0; 2)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (1; 1; 1)$ и $x_2 = (2; 0; -3)$.
 - г) $C^1[0; 3,5]$; $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2x + 3$.

Вариант 6

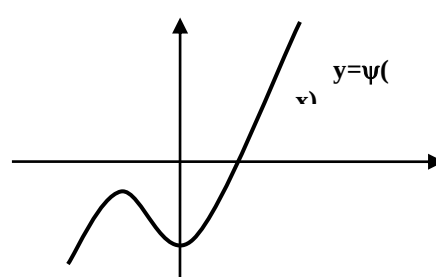
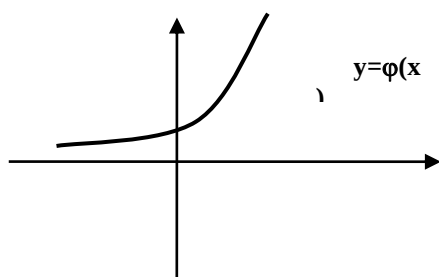
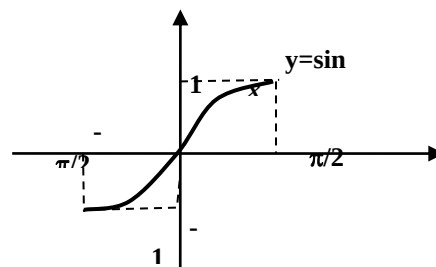
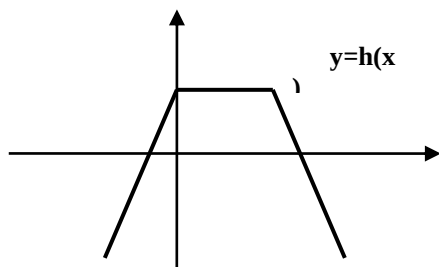
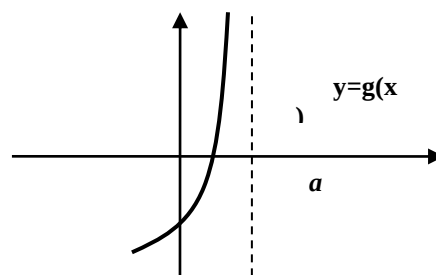
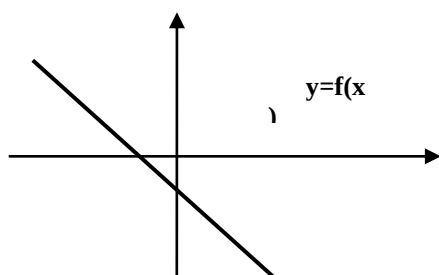
Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.
$$A = \left\{ x \in N \mid \log_{0,5} \frac{1}{x} < 2 \right\}.$$
2. Установите, какая из двух записей верна:
 - а) $\{a; b\} \in \{a; b; \{a; b; c\}\}$ или $\{a; b\} \subset \{a; b; \{a; b; c\}\}$;
 - б) $\{a; b\} \in \{a; b; \{a; b\}\}$ или $\{a; b\} \subset \{a; b; \{a; b\}\}$.
3. Даны множества $A = [-2; 2]$ и $B = (-1; 3)$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$. Изобразите их на числовой оси.
4. Приняв отрезок $T = [0; 1]$ за универсальное множество, найдите дополнение множества $\left\{ \frac{1}{4} \right\} \cup \left[\frac{3}{4}; 1 \right)$.
5. A – множество эллипсов, B – множество окружностей. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.

6. Найдите объединение и пересечение множеств $F_n = \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1} \right]$, где $n = 1, 2, 3, \dots$.
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{x, x^2, x^3, x^4\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Пусть A , B и C соответственно множества корней алгебраических уравнений $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$, $R(x) = 0$, где $P(x), Q(x), R(x)$ - многочлены. Каково множество корней совокупности уравнений $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \cdot R(x) = 0 \end{cases}$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = \log_3 x$ отображает множество $F = (3; 27)$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = 2 - 3x$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \pi^x$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. Назовите простейшие элементарные функции, которые осуществляют отображения R в $(0; +\infty)$, R на $(0; +\infty)$.

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{e, e^2, \dots, e^n, \dots\};$

b) $B = \left\{ \frac{5}{2^n} \mid n \in N \right\};$

c) C – множество пятиугольников плоскости, координаты вершин которых рациональны;

d) $D = \{x \in R \mid 2 < x < +\infty\}.$

Часть II. Метрические пространства.

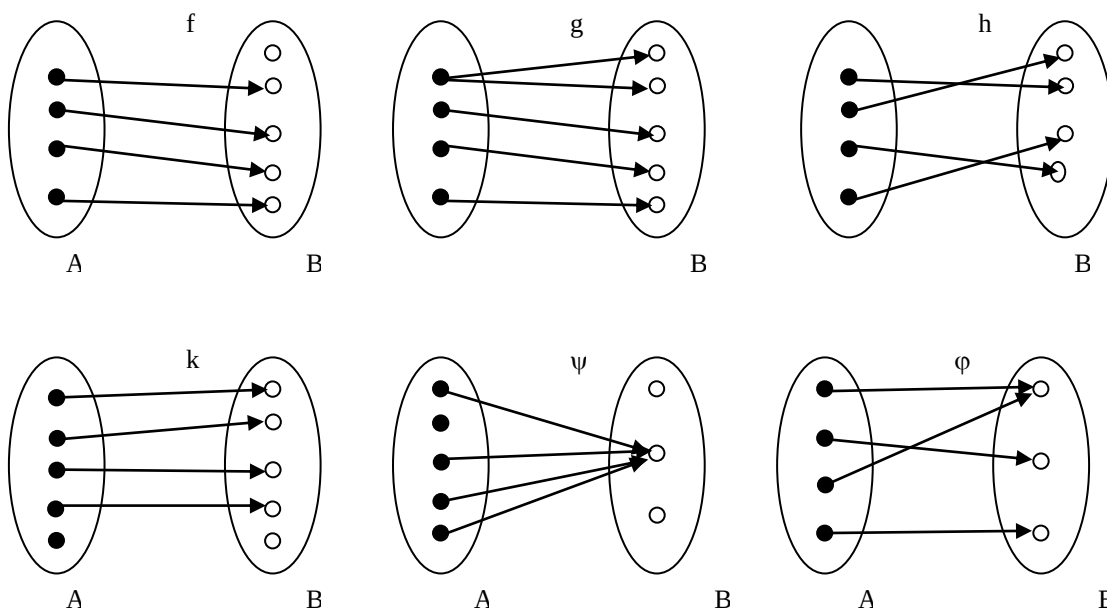
1. Является ли метрикой на прямой R функция $\rho(x, y) = 2x - y$?
2. Будет ли трехмерное пространство R^3 метрическим пространством, если расстояние между точками $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ определить так:
$$\rho(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}.$$
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S[a, r] = [0, 1; 2, 74]$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = \frac{1}{3^x}$ в метрическом пространстве $C[-1; 1]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = -7,3$ и $x_2 = 5,62$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (-2; 0)$ и $x_2 = (4; -8)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (1; 0; 1)$ и $x_2 = (0; -2; 3)$.
 - г) $C^1[0; 3,5]$; $x_1 = x^2$ и $x_2 = 2x + 3$.

Вариант 7

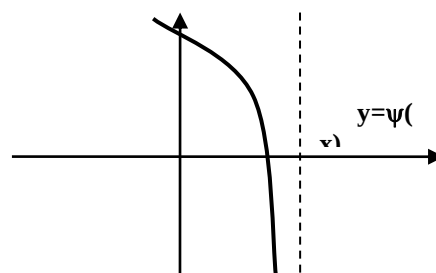
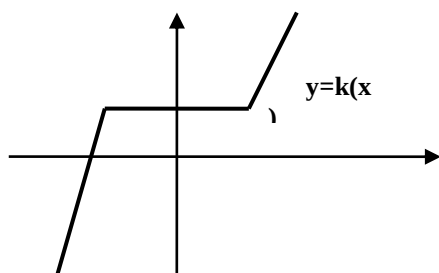
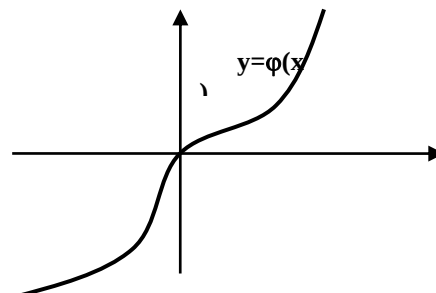
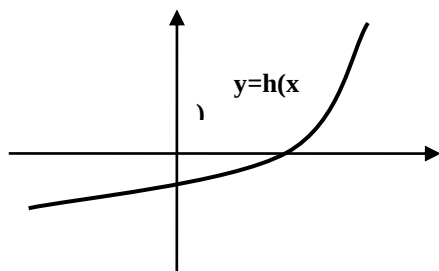
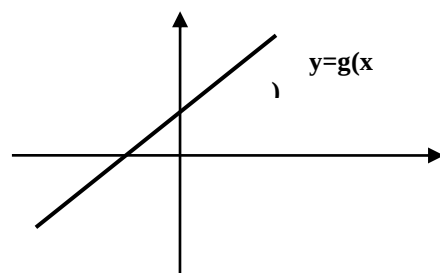
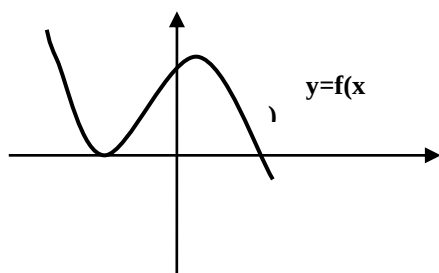
Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Указанное множество задайте перечислением всех его элементов.
$$A = \{x \in R \mid \cos^2 2x = 1 \text{ и } 0 < x \leq 2\pi\}.$$
2. Верна ли запись:
 - а) $\{1; 0\} \in \{1; 0; \{1; 0; 2\}\}$;
 - б) $\{1; 0\} \in \{1; 0; 3\}$
 - в) $\{1; 0\} \in \{1; \{1; 0\}; \{1; 0; 2\}\}$;
 - г) $\{1; 0\} \subset \{0; 1; 2; \{1; 2\}\}$;
 - д) $\{1; 0\} \subset \{1; 2; 3\}$.
3. Пусть $A = \{2n \mid n \in N\}$, $B = \{2n - 1 \mid n \in N\}$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
4. Приняв интервал $B = (-2; 3)$ за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение множества $\{1; 2\}$.

5. A – множество параллелограммов, B – множество трапеций. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Найдите объединение и пересечение множеств $A_n = [n, n+1]$, где $n = 1, 2, 3, \dots$
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{-4, -3, -2, -1\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Как выражается решение системы $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$ через решение неравенств:
 $x + y - 1 \geq 0$ и $x - 2y \geq 0$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ отображает множество $F = \left[0; \frac{1}{2}\right)$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = \log_5 x$; 2) $y = 7x$; 3) $y = x^4 - x^2$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. Задает ли функция $y = \operatorname{tg} x$ отображение R в R ? Задайте с помощью этой функции взаимное однозначное соответствие.

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \left\{ \frac{n+3}{3} \mid n \in N \right\};$

b) $B = \left\{ (-1)^n \frac{1}{2^n} \mid n \in N \right\};$

- c) C – множество треугольников плоскости, координаты точки пересечения медиан которых рациональны;

d) $D = \{x \in R \mid -3 \leq x < +\infty\}.$

Часть II. Метрические пространства.

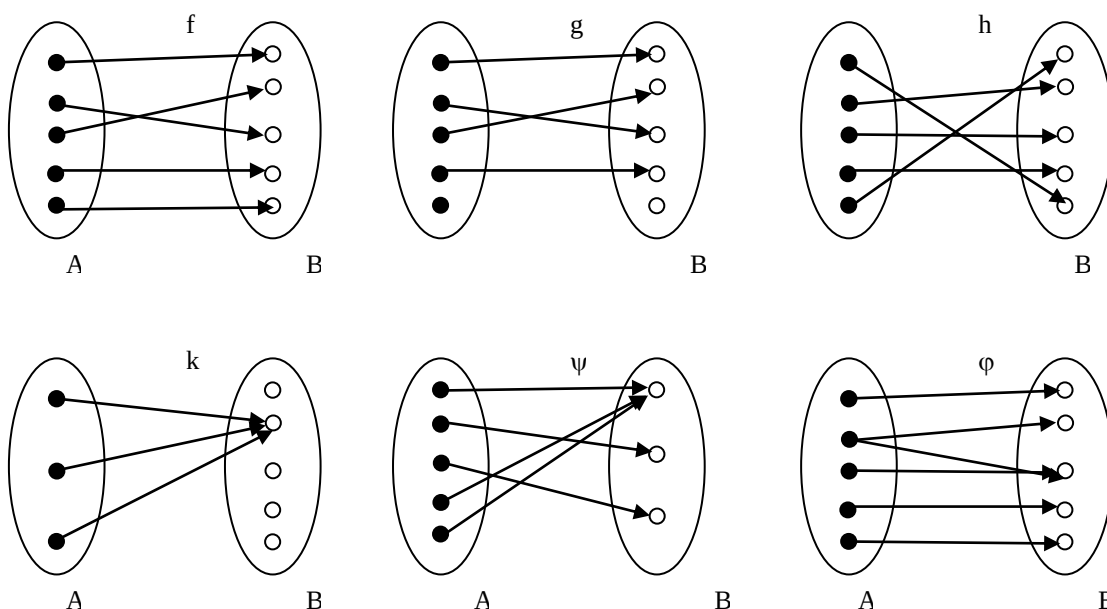
1. Является ли метрикой на прямой R функция $\rho(x, y) = x^2 + y^2$?
2. Докажите, что множество действительных чисел R с функцией $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ является метрическим пространством.
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S(a, r) = (-2, 2; 0, 36)$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = e^x - 2$ в метрическом пространстве $C[-1; 2]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = -5,04$ и $x_2 = 1,7$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (2; 3)$ и $x_2 = (-2; 3)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (1; 1; -1)$ и $x_2 = (0; 2; -2)$.
 - г) $C^1[0; 1]$; $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$.

Вариант 8

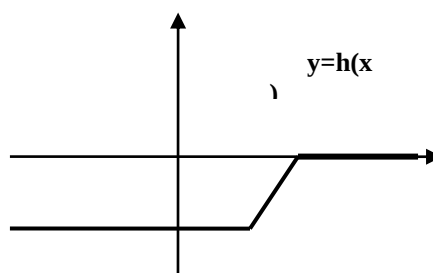
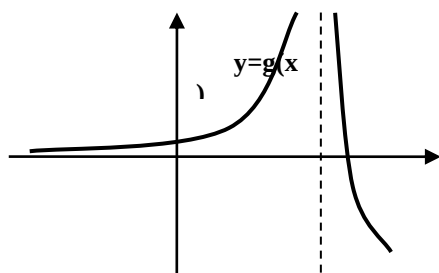
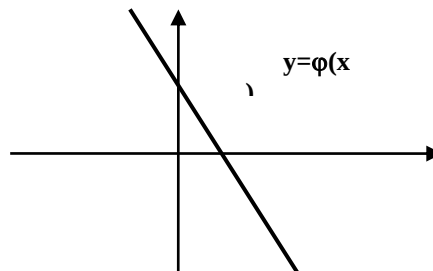
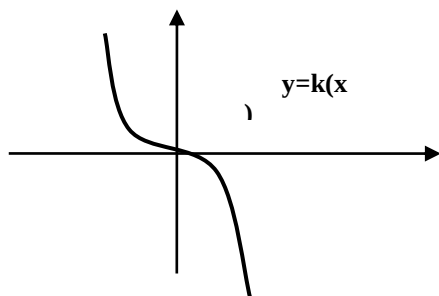
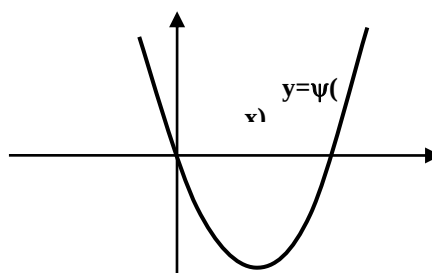
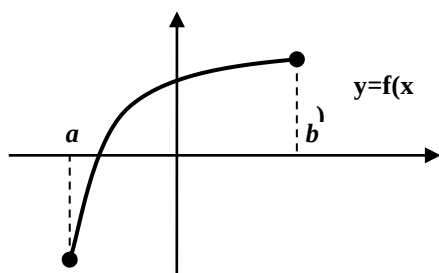
Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Запись $m \mid n$, где $m, n \in Z$, означает, что число m есть делитель числа n . Перечислите все элементы множества $A = \{x \in N \mid x \mid 8 \text{ и } x \neq 1\}$.
2. Верна ли запись:
 - а) $\{a; b\} \in \{a; b; \{a\}; \{b\}\}$;
 - б) $\{a; b\} \subset \{a; b; \{a\}; \{b\}\}$
 - в) $\{a; b\} \in \{a; b; c; \{a; b\}\}$;
 - г) $\{a; b\} \subset \{a; b; c; \{a; b\}\}$;
 - д) $\{a; b\} \subset \{a; c; \{a; b\}\}$.
3. Пусть $A = (-1; 8)$, $B = [1; 7]$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
4. Приняв все действительные числа R за универсальное множество, найдите дополнение множества рациональных чисел Q .
5. A – множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, B – множество функций, дифференцируемых на отрезке $[a, b]$. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.

6. Найдите объединение и пересечение множеств $X_n = \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$.
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Выразите множество решений уравнения $\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$ через множества решений уравнений: $\sin \frac{x}{3} = 0$ и $\sin \frac{x}{5} = 0$.
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = 2x + 1$ отображает множество $F = [-1; 2)$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = 5^{2x}$; 2) $y = 3x - 2$; 3) $y = 2x^5 - x^3$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. Назовите простейшие элементарные функции, которые осуществляют отображение интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ на R ; интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ на отрезок $[-1; 1]$.

14. Укажите мощность данных множеств:

a) A – множество простых чисел;

b) $B = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n+2} \mid n \in N \right\}$;

c) C – множество шестиугольников плоскости, координаты вершин которых рациональны;

d) $D = \{x \in R \mid 5 \leq x \leq 7\}$.

Часть II. Метрические пространства.

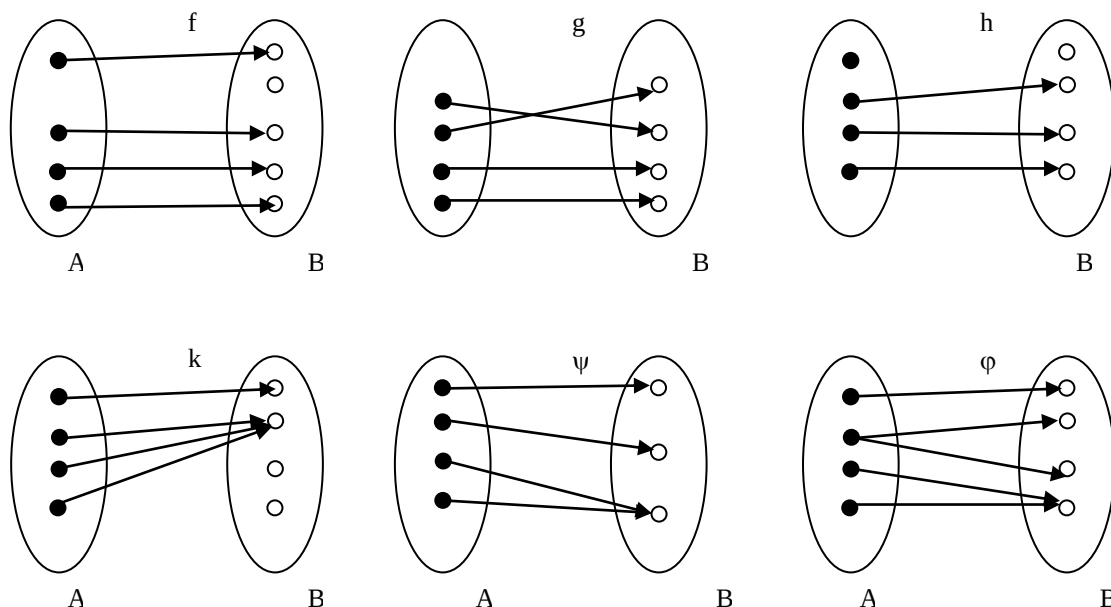
1. Множество $M = \{a, b, c\}$ с метрикой ρ является метрическим пространством, и $\rho(a, b) = \rho(b, c) = 1$. Какие значения может принимать расстояние $\rho(a, c)$?
2. Докажите, что пара $(R, \rho(x, y) = |x - y|)$ - метрическое пространство.
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S[a, r] = [1, 72; 3, 54]$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = 2x^2 + 1$ в метрическом пространстве $C[-2; 2]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = -3,5$ и $x_2 = 4,81$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (2; -3)$ и $x_2 = (-1; 1)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (1; 2; 1)$ и $x_2 = (0; 0; -3)$.
 - г) $C[1; 2]$; $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$.

Вариант 9

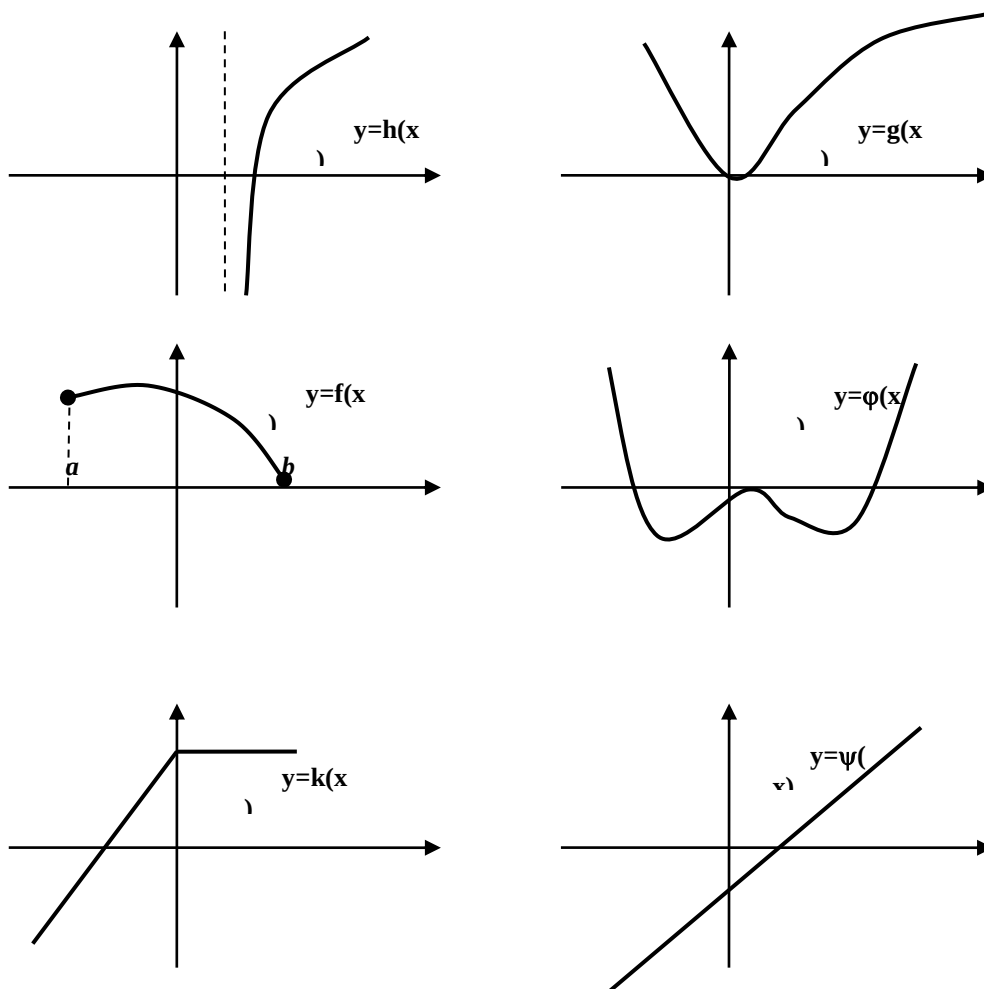
Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Запись $m \mid n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, означает, что число m есть делитель числа n . Перечислите все элементы множества $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$.
2. Установите, какая из двух записей верна:
 - а) $\{a\} \in \{a; b; \{a\}; \{b\}\}$;
 - б) $a \in \{a; b; \{a\}; \{b\}\}$
 - в) $\{a\} \subset \{a; b; \{a; b\}\}$;
 - г) $a \subset \{a; b; \{a\}; \{b\}\}$
 - д) $\{a\} \in \{a; b; c\}$.
3. Даны множества $A = [-2; 3)$ и $B = (1; 3]$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
4. Приняв полуинтервал $B = [-2; 3)$ за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение интервала $(-2; 0)$.

5. A – множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, B – множество функций, ограниченных на отрезке $[a,b]$. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Для заданного семейства множеств $A_n = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}$, найдите $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{2; 4; 6\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Как выражается решение уравнения $(y-x)(y^2+x^2-1)=0$ через решения уравнений: $y-x=0$ и $y^2+x^2-1=0$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = \operatorname{tg} x$ отображает множество $F = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = e^{2x}$; 2) $y = \operatorname{ctg} x$; 3) $y = x - x^4$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. A – множество русских слов, B – множество букв русского алфавита. Задайте отображения A в B и B в A .

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\};$

b) $B = \left\{ \left(\frac{2}{7} \right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\};$

c) C – множество треугольников плоскости, координаты ортоцентра которых рациональны;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}.$

Часть II. Метрические пространства.

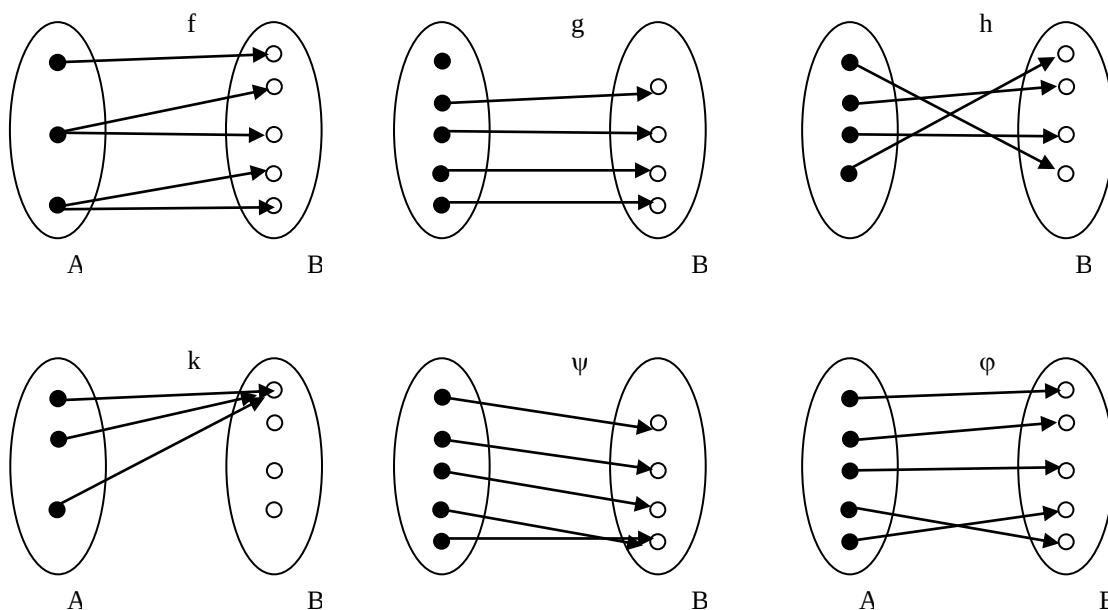
1. Является ли множество $M = \{a, b, c\}$ метрическим пространством, если расстояние ρ удовлетворяет условиям: $\rho(a, c) = \rho(c, a) = \rho(a, b) = \rho(b, a) = 2$, $\rho(b, c) = \rho(c, b) = 1$?
2. Докажите, что множество действительных чисел R с расстоянием $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ является метрическим пространством.
3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S[a, r] = [-1, 72; 3, 5]$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?
4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = 2 - 3x$ в метрическом пространстве $C[-2; 1]$.
5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:
 - а) E_1 ; $x_1 = 7,82$ и $x_2 = -1,35$.
 - б) E_2 ; $x_1 = (5; -1)$ и $x_2 = (4; -2)$.
 - в) E_3 ; $x_1 = (2; 1; 0)$ и $x_2 = (-1; -1; -1)$.
 - г) $C[0; 2]$; $f(x) = x^3 - 3x + 1$ и $g(x) = 0$.

Вариант 10

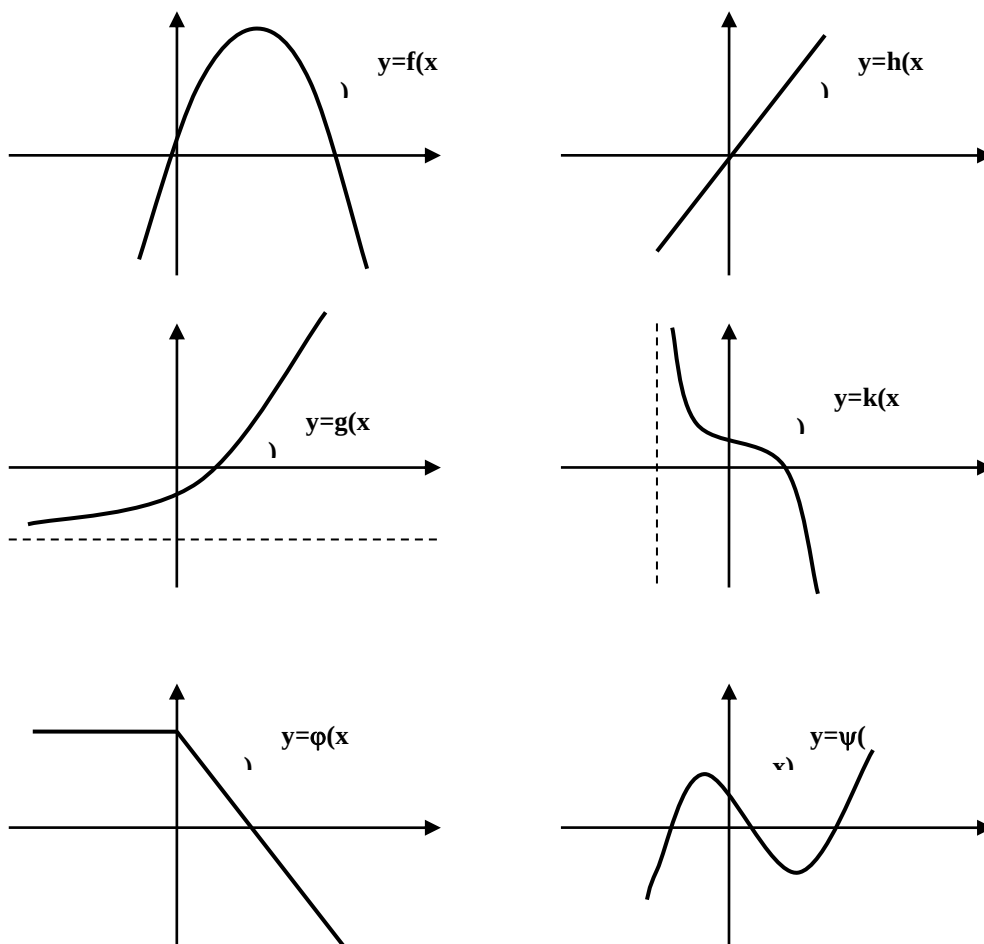
Часть I. Множество. Мощность множества.

1. Запись $m | n$, где $m, n \in Z$, означает, что число m есть делитель числа n . Перечислите все элементы множества $D = \{x \in N \mid 12 \mid x\} \cap \{x \in N \mid 8 \mid x\}$.
2. Установите, какая из двух записей верна:
 - а) $\{1\} \in \{-1; 1; \{-1; 0; 1\}\}$ или $\{1\} \subset \{-1; 1; \{-1; 0; 1\}\}$;
 - б) $\{1\} \in \{-1; 0; \{1\}\}$ или $\{1\} \subset \{-1; 0; \{1\}\}$.
3. Даны множества $A = (-1; 3]$, $B = [0; 5)$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
4. Приняв все действительные числа R за универсальное множество, найдите и изобразите на числовой оси дополнение интервала $(-10; +\infty)$.
5. A – множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, B – множество функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.
6. Найдите объединение и пересечение множеств $B_n = [-n, n]$, где $n = 1, 2, 3, \dots$.

7. Составьте множество всех подмножеств множества $B = \{10; 20; 30\}$. Определите мощность B и составленного множества M .
8. Пусть A, B и C соответственно множества корней алгебраических уравнений $P(x) = 0, Q(x) = 0, R(x) = 0$, где $P(x), Q(x), R(x)$ - многочлены. Каково множество корней системы уравнений $\begin{cases} R(x) = 0 \\ P(x) \cdot Q(x) = 0 \end{cases}$?
9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.



10. Найдите множество G , на которое функция $y = \frac{1}{x}$ отображает множество $F = [1; 4]$.
11. Даны отображения, которые задаются графически функциями (отображается область определения функции $D(y)$ в её множество значений $E(y)$). Укажите взаимное однозначное отображение.



12. Отображения A на B заданы функциями: 1) $y = 2x^3 - 3$; 2) $y = \cos x$; 3) $y = 2 - 7x$.

Для указанных отображений множества $A = D(y)$ и $B = E(y)$. Укажите функции, которые осуществляют взаимное однозначное соответствие.

13. Назовите простейшие элементарные функции, которые осуществляют отображение интервала $(0; \pi)$ в R , интервала $(0; +\infty)$ на $(0; +\infty)$.

14. Укажите мощность данных множеств:

a) $A = \{1; 2; 4; 8; 16; \dots\};$

b) $B = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in Z \right\};$

c) C – множество треугольников плоскости, координаты точки пересечения серединных перпендикуляров которых рациональны;

d) $D = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 2 \text{ и } 4 < x < 7\}.$

Часть II. Метрические пространства.

1. Дано множество действительных чисел R . Является ли метрикой в R функция

$$\rho(x, y) = |x^2 - y^2|?$$

2. Докажите, что множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с расстоянием

$$\rho(x(t), y(t)) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dx} \text{ - есть метрическое пространство.}$$

3. В метрическом пространстве E_1 дан шар $S[a, r] = [-4, 02; -0, 26]$. Найдите его центр и радиус. Какое это множество: открытое или замкнутое?

4. Постройте ε -окрестность точки (функции) $f(x) = x^2$ в метрическом пространстве $C[0; 2]$.

5. Найдите расстояние между точками в данных метрических пространствах:

а) E_1 ; $x_1 = 2,03$ и $x_2 = -1,77$.

б) E_2 ; $x_1 = (-2; 2)$ и $x_2 = (2; 4)$.

в) E_3 ; $x_1 = (-1; 0; -1)$ и $x_2 = (1; 2; 1)$.

г) $C_L[0; 2]$; $f_1(x) = x^3 - 3x + 1$ и $f_2(x) = 0$.

2.2.3. Типовой вариант контрольной работы с решениями и указаниями

Задание 1. Указанное множество $A = \{x \in N \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$ задайте перечислением всех его элементов.

Решение:

1) Решим данное квадратное неравенство $x^2 - 3x - 4 \leq 0$. Корни квадратного трехчлена $x = 4$ и $x = -1$. Тогда данное неравенство примет вид: $(x - 4)(x + 1) \leq 0$.

Если использовать метод интервалов, то получим $x \in [-1; 4]$: решение неравенства. По условию $x \in N$. Тогда множество $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Задание 2. Верна ли запись:

а) $5 \in \{\{1; 2\}; 3; \{4; 5\}\};$

б) $\{4; 5\} \subset \{\{1; 2; 3; 4\}; 4; 5\}?$

Решение:

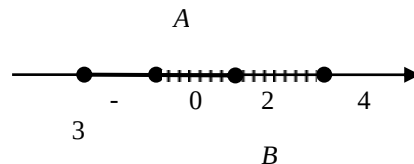
а) Данное множество $\{\{1; 2\}; 3; \{4; 5\}\}$ состоит из трех элементов: множество $\{1; 2\}$, число 3 и множество $\{4; 5\}$. Поэтому число 5 – это не элемент данного множества. Следовательно, запись не верна.

б) Множество $\{4; 5\}$ состоит из элементов 4 и 5. Они являются элементами множества $\{\{1; 2; 3; 4\}; 4; 5\}$. Следовательно, запись верна.

Задание 3. Даны множества $A = [-3; 2]$ и $B = [0; 4]$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$. Изобразите их на числовой оси.

Решение:

Множества A и B изображаем на числовой прямой.



$A \cup B$ - это точки, которые лежат хотя бы в одном множестве, то есть $A \cup B = [-3; 4]$.

$A \cap B$ - это точки, которые принадлежат обоим множествам, то есть $A \cap B = [0; 2]$.

$A \setminus B$ - это точки, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B , то есть $A \setminus B = [-3; 0)$.

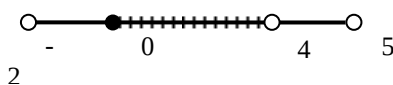
$B \setminus A$ - это точки, которые принадлежат множеству B , но не принадлежат множеству A , то есть $B \setminus A = (2; 4]$.

Задание 4. Пусть интервал $I = (-2; 5)$ - универсальное множество и множество $A = [0; 4]$. Найдите дополнение $C_I A$.

Решение:

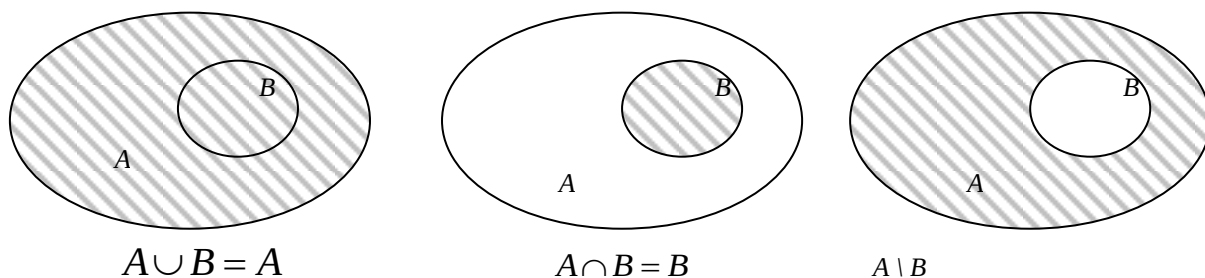
$$C_I A = I \setminus A.$$

$$C_I A = (-2; 0) \cup (4; 5).$$



Задание 5. Пусть A - множество всех функций, определенных на отрезке $[a; b]$. B - множество функций, интегрируемых на отрезке $[a; b]$. Изобразите на диаграммах Венна множества $A \cup B, A \cap B$ и $B \setminus A$.

Решение: Заметим, что множество $B \subset A$.



$$B \setminus A = \emptyset.$$

Задание 6. Заданы множества $A_n = [1, n]$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Найдите

$$\bigcup_{n=1}^{50} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^7 A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Решение:

1) $A_1 = [0; 1], A_2 = [0; 2], A_3 = [0; 3], \dots, A_{50} = [0; 50]$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{50} A_n = [0; 50]$, а

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [0; +\infty).$$

$$2) \bigcap_{n=1}^7 A_n = [0; 1], \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0; 1].$$

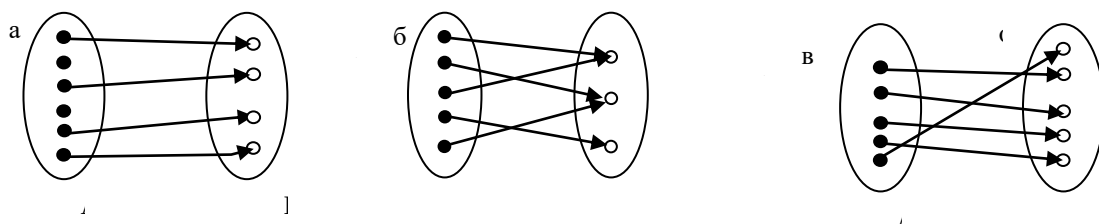
Задание 7. Составьте множество всех подмножеств множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Указание: Если множество A состоит из n элементов, то множество всех подмножеств данного множества имеет 2^n элементов.

Задание 8. Например, A – множество корней уравнения $f(x) = 0$, а B – множество решений неравенства $g(x) \leq 0$. Тогда множество корней системы $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$ будет пересечение множеств A и B ($A \cap B$), а множество корней совокупности $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$ – объединение множеств ($A \cup B$).

Задание 9. Даны два множества A и B . Укажите отображения A в B , A на B , взаимное однозначное отображение.

Решение:



а) Это отображение не является отображением A в B , так как в A есть элементы, которые не имеют образов.

б) Рассмотрим следующее соответствие:

Задано отображение множества A в B , оно же будет отображением A на B , так как все элементы множества B являются образами. Но это отображение не взаимно однозначное, так как в B есть элемент, который имеет два прообраза.

- в) Это взаимно однозначное отображение: отображение A на B ;
- 2) различным элементам из A соответствуют различные образы из B .

Указание к заданию 10. Изобразите график функции и данное множество. Найдите образы элементов из указанного множества.

Указание к заданиям 11-12. 1) Найдите область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$, указанных функций. Очевидно, что задано отображение $D(f)$ на $E(f)$.

- 2) Убедитесь, что для любых элементов $x_1, x_2 \in D(f)$ таких что $x_1 \neq x_2$ выполняется: $y_1 \neq y_2$, где $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ (интерпретируйте эту информацию на геометрический «язык», если функция задана графически).

Критерии оценки компетенций в рамках типовых контрольных заданий:

1. Соответствие ответа формулировке вопроса. Содержательность, глубина и полнота ответа. Достоверность излагаемого материала (0-30 баллов).
2. Практическая направленность (0-30 баллов)
3. Аргументированность, логичность (0-20 баллов).
4. Достаточный научно-теоретический уровень ответа (0-20 баллов).

Типовое задание оценивается по 100-балльной шкале, которая переводится в пяти балльную шкалу в соответствии с действующим на текущий момент Положением о рейтинговой системе текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов:

- оценка «5» выставляется в случае, если студент выполнил качественно 87–100 % типового задания;
- оценка «4» выставляется в случае, если студент выполнил качественно 75–86 % типового задания;
- оценка «3» выставляется в случае, если студент выполнил качественно 60–74 % типового задания;
- оценка «2» выставляется в случае, если студент выполнил менее 60 % типового задания.

Уровень сформированности компетенции ПК-1 в рамках типовых контрольных заданий:

Уровни	Показатели
пороговый	Ответ в основном правильный, но схематичный, обнаруживающий лишь умение поверхностно и с отклонениями от последовательности изложения раскрыть материал; научно-теоретический уровень ответа не достаточен; нет обобщений и выводов в полном объеме, имеются существенные ошибки в формулировке определений.

базовый	Ответ, обнаруживает хорошее знание и понимание материала, умение излагать свои мысли последовательно и грамотно. В ответе может быть недостаточно полно развернута аргументация, возможны отдельные затруднения в формулировке выводов, иллюстративный материал может быть представлен недостаточно, приводимые примеры не точные, отдельные ошибки в формулировке понятий
повышенный	Ответ исчерпывающий, точный, проявлено умение пользоваться материалом текстов по предмету для аргументации и самостоятельных выводов, свободное владение соответствующей терминологией, навыками анализа, умение излагать свои мысли последовательно с необходимыми обобщениями и выводами, используя термины.

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Целью промежуточной аттестации по данной дисциплине является оценка уровня сформированности компетенций в результате усвоения знаний, приобретения умений, навыков и опыта деятельности в рамках освоения дисциплины (модуля).

Процедура оценивания охватывает обучающихся, освоивших дисциплину (модуль). Процедура оценивания проводится по окончании освоения дисциплины (модуля). Оценка уровня сформированности компетенций на этапах их формирования определяется на основании собеседования, включающих теоретические вопросы или задания, в которых обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально-ориентированную ситуацию, необходимую для решения данной проблемы; при этом актуализируется определенный комплекс знаний, необходимый для разрешения данной проблемы. Оценивание ответов обучающихся проводится в соответствии с приведенными критериями.

На основании ответов (ответов на тест, выполнение практико-ориентированного задания) оценивается уровень сформированности компетенций на этапах их формирования в рамках дисциплины (модуля), а также уровень знаний, умений, навыков и опыта деятельности, по результатам выставляется оценка. Результаты проведения процедуры в установленном порядке проставляются преподавателем в зачетные книжки обучающихся и электронные ведомости. По результатам проведения процедуры оценивания преподавателем делается вывод о результатах промежуточной аттестации по дисциплине.

Процедура оценивания (зачет) соответствует действующим в вузе текущим положениям, включая Положение о рейтинговой системе текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов.