

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В.М. Шукшина»
(АГГПУ имени В.М. Шукшина)

Кафедра математики, физики, информатики



Утверждаю
проректор по учебной работе
М.В. Довыдова
«07» мая 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.05.11 ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профиль подготовки	Математика и Информатика
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная

Составитель:
старший преподаватель


А.И. Чередниченко

Бийск 2024

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

на заседании кафедры математики, физики, информатики

(протокол от 05 февраля 2024 г. № 5)

Заведующий кафедрой

математики, физики, информатики



Г.С. Шилинг

1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины - формирование систематизированных знаний в области теории чисел и числовых систем.

Задачи дисциплины:

- формирование понятийного аппарата теории чисел, знаний и умений, необходимых для решения типовых задач данной предметной области;
- формирование теоретико-числовой культуры, необходимой будущему учителю для глубокого понимания теоретических основ школьного курса математики;
- формирование профессиональной предметной направленности знаний, умений и навыков, полученных при изучении дисциплины.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Теория чисел и числовые системы» относится к обязательной части профессионального цикла (Б1.О.05.11). Областью профессиональной деятельности бакалавров, на которую ориентирует дисциплина, является образование.

Освоение дисциплины готовит к работе со следующими объектами профессиональной деятельности бакалавров:

- обучение;
- воспитание;
- развитие;
- образовательные системы.

Профильной для данной дисциплины является профессиональная деятельность бакалавров.

Для освоения дисциплины студенты используют знания, умения и способы деятельности, сформированные в процессе изучения предмета «Математика» на предыдущем уровне образования, а также знания, умения, навыки, способы деятельности и установки, полученные и сформированные в ходе изучения дисциплин «Математический анализ», «Алгебра» и «Геометрия».

Освоение данной дисциплины является необходимой основой для изучения по учебному плану смежных с нею и последующих дисциплин: методика обучения математике, теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного, элементарная математика, история математики, теоретические основы информатики, системы компьютерной алгебры, методы и средства защиты информации.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих *компетенций*:

- Способен проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика (ПК-1).

Наименование и код индикаторов достижения компетенций:

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- ПК-1.1: знание основы методики преподавания, основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий в области математики (3.1);
- ПК-1.2: знание рабочей программы и методики обучения по математике (3.2);

уметь:

- ПК-1.3: умение планировать и проводить учебные занятия по математике (У.1);
- ПК-1.4: умение использовать методы и средства педагогического мониторинга, позволяющие оценить степень сформированности у детей качеств, необходимых для дальнейшего обучения и развития по математике (У.2);

владеть:

- ПК-1.5: владеть формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, практические занятия и т.п. (В.1).

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		7	8
Аудиторные занятия (всего)	54	28	26
В том числе:			
Лекции (Л)	24	12	12
Практические занятия (ПЗ)	30	16	14
Лабораторные работы (ЛР)	-	-	-
Самостоятельная работа студентов (СРС) (всего)	63	8	55
В том числе:			
Подготовка к лекционным занятиям	12	2	10
Подготовка к практическим занятиям	12	2	10
Подготовка к коллоквиумам	12	2	10
Подготовка к теоретическим опросам	12	2	10
Выполнение индивидуальных домашних заданий	10	-	10
Итоговый (семестровый) тест	5	-	5
Подготовка к аудиторным проверочным (контрольным) работам	-	-	-
Вид промежуточной аттестации	экзамен, зачет	зачет	экзамен
Экзамен	-	-	27
Общая трудоемкость в часах	144	36	108
Общая трудоемкость в часах в зачетных единицах	4	1	3

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Содержание разделов (модулей) дисциплины

7 семестр

№ п/п	Наименование раздела (модуля) дисциплины	Содержание
1.	Делимость и простые числа	Делимость целых чисел. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное. Простые и составные числа. Свойства простых чисел. Признак простоты числа. Основная теорема арифметики. Бесконечность множества простых чисел. Неравенство Чебышева для $\pi(x)$. Систематические числа.
2	Конечные цепные дроби	Конечные цепные дроби. Разложение рационального числа в конечную цепную дробь. Подходящие дроби. Свойства подходящих дробей.
3	Сравнения в кольце целых чисел	Сравнения по модулю, их основные свойства. Кольцо классов вычетов. Полная и приведенная системы вычетов. Мультипликативная группа обратимых элементов в кольце классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю. Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма. Сравнения с неизвестной величиной. Сравнения первой степени. Критерий разрешимости и число решений. Решение сравнений первой степени методом подбора, методом преобразования коэффициентов, по формуле Эйлера, с помощью подходящих дробей Сравнения по простому модулю. Сведение к наиболее простому виду. Максимальное число решений. Теорема Вильсона. Сравнения по степени простого числа. Редукция сравнения по составному модулю к сравнению по степени простого числа и к сравнениям по простому модулю. Первообразные корни и индексы. Показатели чисел и классов по данному простому модулю. Число классов с заданным показателем. Теорема о существовании первообразного корня по простому модулю. Индексы чисел и классов по данному модулю. Основные свойства индексов. Таблицы индексов. Применение индексов к решению двучленных сравнений по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра. Арифметические приложения теории сравнений. Вычисление остатков при делении на данное число. Признаки делимости. Определение длины периода, получающегося при обращении обыкновенной дроби в десятичную.

4	Бесконечные цепные дроби	Бесконечные цепные дроби. Сходимость бесконечных цепных дробей. Разложение действительных чисел в цепные дроби. Квадратичные иррациональности и периодические цепные дроби. Теорема Лагранжа о квадратичной иррациональности. Приближение действительных чисел подходящими дробями. Теорема Дирихле, ее применение к представлению простого числа $p \equiv 1 \pmod{4}$ в виде суммы двух квадратов.
---	---------------------------------	---

8 семестр

№ п/п	Наименование раздела (модуля) дисциплины	Содержание
5.	Аксиоматические теории	Задачи обоснования математики. Аксиоматический метод. Понятие об аксиоматической теории. Формальные и неформальные (содержательные) аксиоматические теории. Схема построения неформальной аксиоматической теории; формулировка аксиоматической теории. Свойства аксиоматических теорий: непротиворечивость, категоричность, полнота, независимость аксиом в данной теории.
6.	Аксиоматическая теория натуральных чисел	Формулировка содержательной аксиоматической теории натуральных чисел; первичные термины и аксиомы. Независимость аксиом Пеано. Принцип полной математической индукции. Сложение и умножение натуральных чисел. Основные свойства сложения и умножения. Аддитивная полугруппа и полукольцо натуральных чисел Порядок во множестве натуральных чисел. Отношение «меньше». Основные свойства линейно упорядоченного множества и упорядоченного полукольца натуральных чисел. Независимость аксиомы индукции. Натуральные кратные и степени элементов полугруппы, их свойства. Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Проблема непротиворечивости арифметики. Конечные и бесконечные множества. Основное свойство конечного множества. Бесконечность множества натуральных чисел. Понятие о количественной теории натуральных чисел.
7	Аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел	Формулировка аксиоматической теории целых чисел. Свойства целых чисел; представление целого числа в виде разности двух натуральных чисел. Категоричность и непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел. Формулировка аксиоматической теории рациональных чисел. Свойства рациональных чисел; плотность поля рациональных чисел. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.

		Нормированное поле. Последовательности в нормированных полях. Свойства последовательностей в нормированных полях. Последовательности элементов линейно упорядоченного поля. Последовательности элементов архимедовски линейно упорядоченного поля. Аксиоматическая теория действительных чисел. Действительное число как предел последовательности рациональных чисел. Существование корня натуральной степени из положительного действительного числа. Категоричность и непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел. Аксиоматическая теория комплексных чисел. Свойства комплексных чисел. Категоричность и непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.
8	Линейные алгебры	Линейные алгебры над полем действительных чисел. Тело кватернионов. Алгебра чисел Кэли. Теорема Фробениуса.

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	В том числе в интерактивной форме (час)		СРС	Всего
1.	Делимость и простые числа	2	2	-	-	-	4
2.	Конечные цепные дроби	2	2	-	-	-	4
3.	Сравнения в кольце целых чисел	2	2	-	-	-	4
4.	Бесконечные цепные дроби	2	2	-	-	-	4
5.	Аксиоматические теории	2	2	-	-	-	4
6.	Аксиоматическая теория натуральных чисел	2	2	-	-	-	4
7.	Аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел	-	2	-	-	4	6
8.	Линейные алгебры	-	2	-	-	4	6
	Всего в 7 семестре:	12	16	10	8	8	36
	<i>В том числе в интерактивной форме</i>			лекц 5	практ. 5		
	Аксиоматические теории	4	4	-	-	5	13
	Аксиоматическая теория натуральных чисел	4	4	-	-	10	18
	Аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел	2	4	-	-	20	26

	Линейные алгебры	2	2	-	20	24
	Всего в 8 семестре:	12	14	10	55	108
	В том числе в интерактивной форме			лекц 5	практ. 5	
	Экзамен	-	-	-	-	27
	Всего:	24	30	20	63	144
В том числе, использование интерактивных форм, технологий				лекц 10	практ. 10	

Лекции

№ п/п	Наименование раздела (модуля) дисциплины	Содержание
Лекции – 7 семестр		
1-3	Делимость и простые числа	Делимость целых чисел. Теорема о делении с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Расширенный алгоритм Евклида. Взаимно простые числа. Наименьшее общее кратное.
		Простые и составные числа. Свойства простых чисел. Признак простоты числа. Основная теорема арифметики. Бесконечность множества простых чисел. Неравенство Чебышева для $\pi(x)$.
4, 5	Конечные цепные дроби	Конечные цепные дроби. Разложение рационального числа в конечную цепную дробь. Подходящие дроби. Свойства подходящих дробей.
6, 7	Сравнения в кольце целых чисел	Сравнения по модулю, их основные свойства. Кольцо классов вычетов. Полная и приведенная системы вычетов. Мультипликативная группа обратимых элементов в кольце классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю.
		Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма.
		Сравнения с неизвестной величиной. Сравнения первой степени. Критерий разрешимости и число решений. Решение сравнений первой степени методом подбора, методом преобразования коэффициентов, по формуле Эйлера, с помощью подходящих дробей
		Сравнения по простому модулю. Сведение к наиболее простому виду. Максимальное число решений. Теорема Вильсона. Сравнения по степени простого числа. Редукция сравнения по составному модулю к сравнению по степени простого числа и к сравнениям по простому модулю

		Первообразные корни и индексы. Показатели чисел и классов по данному простому модулю. Число классов с заданным показателем. Теорема о существовании первообразного корня по простому модулю.
		Индексы чисел и классов по данному модулю. Основные свойства индексов. Таблицы индексов. Применение индексов к решению двучленных сравнений по простому модулю.
		Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра.
		Арифметические приложения теории сравнений. Вычисление остатков при делении на данное число. Признаки делимости. Определение длины периода, получающегося при обращении обыкновенной дроби в десятичную.
8-10	Бесконечные цепные дроби	Бесконечные цепные дроби. Сходимость бесконечных цепных дробей. Разложение действительных чисел в цепные дроби.
		Квадратичные иррациональности и периодические цепные дроби. Теорема Лагранжа о квадратичной иррациональности. Приближение действительных чисел подходящими дробями.
Лекции – 8 семестр		
1	Аксиоматические теории	Задачи обоснования математики. Аксиоматический метод. Понятие об аксиоматической теории. Формальные и неформальные (содержательные) аксиоматические теории. Схема построения неформальной аксиоматической теории; формулировка аксиоматической теории. Свойства аксиоматических теорий: непротиворечивость, категоричность, полнота, независимость аксиом в данной теории.
2, 3	Аксиоматическая теория натуральных чисел	Формулировка содержательной аксиоматической теории натуральных чисел; первичные термины и аксиомы. Независимость аксиом Пеано. Принцип математической индукции. Сложение и умножение натуральных чисел. Основные свойства сложения и умножения. Аддитивная полугруппа и полукольцо натуральных чисел.

		Порядок во множестве натуральных чисел. Отношение «меньше». Основные свойства линейно упорядоченного множества и упорядоченного полукольца натуральных чисел. Независимость аксиомы индукции. Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Проблема непротиворечивости арифметики.
		Конечные и бесконечные множества. Основное свойство конечного множества. Бесконечность множества натуральных чисел. Понятие о количественной теории натуральных чисел.(самостоятельное изучение)
4, 5	Аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел	Формулировка аксиоматической теории целых чисел. Свойства целых чисел; представление целого числа в виде разности двух натуральных чисел. Категоричность и непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
		Формулировка аксиоматической теории рациональных чисел. Свойства рациональных чисел; плотность поля рациональных чисел. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
		Нормированное поле. Последовательности в нормированных полях. Свойства последовательностей в нормированных полях. Последовательности элементов линейно упорядоченного поля. Последовательности элементов архимедовски линейно упорядоченного поля. Аксиоматическая теория действительных чисел. Действительное число как предел последовательности рациональных чисел.
		Существование корня натуральной степени из положительного действительного числа. Категоричность и непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
		Аксиоматическая теория комплексных чисел. Свойства комплексных чисел. Категоричность и непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.
6	Линейные алгебры	Линейные алгебры над полем действительных чисел. Тело кватернионов. Алгебра чисел Кэли. Теорема Фробениуса.

Практические занятия

№ п/п	Наименование (модуля) дисциплины	Содержание
Практические занятия – 7 семестр		
1-3	Делимость и простые числа	Деление с остатком. Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя чисел a, b в виде $d = ax + by$. Расширенный алгоритм Евклида. Наименьшее общее кратное.
		Простые и составные числа. Признак простого числа. Решето Эратосфена. Разложение натурального числа в произведение простых множителей. Нахождение наибольшего общего делителя (наименьшего общего кратного) целых чисел по их каноническому разложению.
		Систематические числа. Арифметические операции над систематическими числами. Перевод чисел из одной системы счисления в другую.
4, 5	Конечные цепные дроби	Разложение рационального числа в конечную цепную дробь. Подходящие дроби. Свойства подходящих дробей. Решение неопределенных уравнений первой степени $ax + by = c$ (с помощью алгоритма Евклида, расширенного алгоритма Евклида, с помощью подходящих дробей).
		Контрольная работа № 1
6-12	Сравнения в кольце целых чисел	Сравнения по модулю, их основные свойства. Кольцо классов вычетов. Полная и приведенная системы вычетов. Мультипликативная группа обратимых элементов в кольце классов вычетов. Поле классов вычетов по простому модулю.
		Функция Эйлера. Теоремы Эйлера и Ферма. Нахождение остатка от деления на заданное число.
		Сравнения с неизвестной величиной. Критерий разрешимости и число решений сравнения первой степени. Решение сравнений испытанием элементов полной системы вычетов и методом преобразования коэффициентов, по формуле Эйлера, с помощью подходящих дробей. Сравнения первой степени и неопределенные уравнения.
		Системы сравнений первой степени. Сравнения по простому модулю. Сравнения по степени простого числа. Редукция сравнения по составному модулю к сравнению по степени простого числа и к сравнениям по простому модулю. Проверочная работа.

		Порядок (показатель) числа и класса вычетов по данному модулю, его свойства. Число классов с заданным показателем по простому модулю. Нахождение первообразных корней. Индексы чисел и классов по данному простому модулю. Свойства индексов. Построение таблиц индексов. Применение индексов к решению двучленных сравнений $ax^n \equiv b(\text{mod } m)$ и показательных сравнений вида $a^x \equiv b(\text{mod } m)$. Квадратичные вычеты и невычеты. Критерий Эйлера. Символ Лежандра. Арифметические приложения теории сравнений. Признаки делимости. Определение длины периода, получающегося при обращении обыкновенной дроби в десятичную.
13-15	Бесконечные цепные дроби	Бесконечные цепные дроби. Разложение действительных чисел в цепные дроби. Квадратичные иррациональности и периодические цепные дроби. Проверочная работа № 2
Практические занятия – 8 семестр		
1-2	Аксиоматические теории	Бинарные отношения на множестве, их свойства. Отношение эквивалентности. Отношение порядка. Бинарные и n-арные операции. Свойства бинарных операций. Алгебры: полугруппы, моноиды, группы, полукольца, кольца, тела, поля.
3-4	Аксиоматическая теория натуральных чисел	Аксиоматическая теория натуральных чисел. Аддитивная полугруппа натуральных чисел. Полукольцо натуральных чисел. Упорядоченное полукольцо натуральных чисел. Роль аксиомы индукции в построении арифметики натуральных чисел. Понятие о количественной теории натуральных чисел.
5-7	Аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел	Упорядоченное кольцо целых чисел. Упорядоченное поле рациональных чисел. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Упорядоченное поле действительных чисел. Представление действительных чисел десятичными дробями. Поле комплексных чисел. Морфизмы универсальных алгебр. Гомоморфные образы. Категоричность аксиоматических теорий целых, рациональных, действительных и комплексных чисел. Контрольная работа № 3

6. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторный практикум по теории чисел и числовым системам учебным планом не предусмотрен

7. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ (РАБОТ)

Курсовой проект (работа) по теории чисел и числовым системам учебным планом не предусмотрен

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

1. *Балюкевич, Э. Л.* Алгебра и теория чисел. [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Э. Л. Балюкевич, З.В. Алферова, А.Н. Романников.– М. : Изд. центр ЕАОИ.– 2011.– 278 с.
2. *Сизый, С.В.* Лекции по теории чисел. [Текст]: учебное пособие для студентов вузов/ С.В. Сизый- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 192 с.
3. *Смолин, Ю.Н.* Алгебра и теория чисел. [Текст]: учебное пособие / Ю.Н. Смолин. – М.: Флинта: Наука, 2016. – 464 с.
4. *Смолин, Ю.Н.* Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] учебное пособие для студентов физико-математических факультетов высших педагогических вузов / Ю. Н. Смолин. - 4-е изд., стер. - Электрон. текстовые дан. - М. : Флинта : Наука, 2012. - 464 с.
5. *Смолин, Ю.Н.* Числовые системы. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.Н. Смолин. – М.: Флинта: Наука, 2010. – 112 с.

б) дополнительная литература:

6. *Андронов, И.К.* Математика действительных и комплексных чисел. [Текст]: И.К. Андронов. – М.: Просвещение, 1975.
7. *Бухштаб, А.А.* Теория чисел. [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / А. А. Бухштаб. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2008. - 384 с
8. *Виноградов, И.М.* Основы теории чисел. [Текст]: учебник для университетов / И. М. Виноградов. - М. : Наука, 1972. - 173 с.
9. *Грибанов, В.У.* Сборник упражнений по теории чисел. [Текст] / В.У. Грибанов, П.И. Титов. – М.: Просвещение, 1964.– 143с.

10. *Кочева, А.А.* Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. [Текст]: учебное пособие для студентов-заочников 2 курса физико-математических факультетов педагогических институтов. Ч. 3 / А. А. Кочева. - М. Просвещение, 1984. - 41 с.
11. *Кошелев, Ю.Г.* Научные основы школьного курса математики при изучении числовых систем. [Текст]: метод. указания / Ю.Г. Кошелев. – Новосибирск: НГПИ, 1980.- 64с.
12. *Ларин, С.В.* Числовые системы. [Текст]: учебное пособие / С.В. Ларин. – Красноярск: Красноярский гос. педагогический институт, 1990. – 182с.
13. *Михелович, Ш.Х.* Теория чисел. [Текст]: учебное пособие / Ш.Х. Михелович. – М.: Высшая школа, 1962. – 260 с.
14. *Нечаев, В.А.* Числовые системы. [Текст]: учебное пособие / В.А. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975.
15. *Шнеперман, Л.Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. [Текст]: учебное пособие. 3-е изд., стер./ Л.Б. Шнеперман. - СПб.: Издательство «Лань», 2008.-224с.

в) программное обеспечение:

1. Работа на компьютере проводится с использованием лицензионных версий операционной системы Microsoft Windows XP Prof.
2. Для работы в библиотеке используется общевузовское лицензионное программное обеспечение «Ирбис-64», в составе которого входят АРМ «Каталогизатор», АРМ «Читатель», АРМ «Администратор», АРМ «Комплектатор», Web-Ирбис (CZ39.50)
3. Лицензионная программа АУП (Шахты) – комплекс «Электронные ведомости»

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1. Национальный цифровой ресурс Рукопт. Режим доступа [<http://www.rucont.ru/>].
2. Университетская библиотека он-лайн. Режим доступа [<http://www.biblioclub.ru/>]. б) интернет-ресурсы 1. <http://www.4p.ru> 2. <http://marketing.com.ru>

д) Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине:

1. Организация самостоятельной работы студентов в учреждении высшего образования [Текст]: методические рекомендации / Сост.Е.Б. Манузина, Е.Э. Норина; Алтайская гос. Академия обр-я им. В.М. Шукшина. – Бийск: ФГБОУ ВПО «АГАО», 2014. – 84 с.

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование помещений для проведения всех видов учебной деятельности, предусмотренной учебным планом, в том числе помещения для самостоятельной работы, с указанием перечня основного оборудования, учебно-наглядных пособий и используемого программного обеспечения	Адрес (местоположение) помещений для проведения всех видов учебной деятельности предусмотренной учебным планом (в случае реализации образовательной программы в сетевой форме
--	---

	дополнительно указывается наименование организации, с которой заключен договор)
Ауд. 106 Учебная физическая лаборатория Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Специализированная мебель. Технические средства обучения: компьютеры, оборудования для физики, наличие подключения к сети Интернет. Microsoft WindowsXP № лицензии 44039700, Microsoft Office - 2010 № лицензии 49379849 <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> <i>Консультант Плюс Договор №26 от 30.12.2022г ООО «Юркомп»</i> Mathcad University Classroom Perpetual - 15 (сетевая версия) Код PKG-7517-EN PTC606002CD140-004 Borland Developer Studio 2006 Professional AcademicEdition SKU: BDB0006WW1518A Borland Developer Studio 2006 Professional AcademicEdition (сетевая версия Живая математика 5.0 <i>Живая физика</i> <i>Лого Миры: Вероятности</i> <i>Виртуальные лаборатории: Электричество и магнетизм, Оптика и волны, Механика и Электродинамика</i> <i>Живая статистика SKU: BDB0006WWXX004, счет №АА 38643-00 от 26 августа 2008 ООО "Куролан Лицензии № 201998313, № 20199834, № 201998319, № 201998311, № 201998310, № 20199835, № 20199838, № 201998312, № 20199839</i> <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: 2 ГИС, 7-Zip, Adobe License: Adobe Flash Player; Adobe Reader, AIMP3, BurnAware Free, CCleaner, Defraggler, Far Manager, Firebird, Foxit Reader, GNU (Geniral Public, cense или аналог) Version 2: Auda City; Blender; DB Designer; FileZilla; Inscapе; Open Office 4; Virtual Dub, VLC Media player; Oracle Vertual Box, GNU (Geniral Public License или аналог) Version 3, Gimp; K-LiteKodecPack, XAMPP, Google Chrome, HEFS, IBExpert, MyTestX, Notepad++, Pascal ABC, Денвер, ictnзор, InternetCensor, Non Vigul Desktop Access (NVDA) Айрен v2.3– редактор тестов, LibreOffice	Российская Федерация, 659300 г. Бийск, ул. Советская, 9, учебный корпус 3
Ауд. 126 Учебная физическая лаборатория Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Специализированная мебель. Технические средства обучения: стационарный компьютер, школьное физическое оборудование, наличие подключения к сети Интернет. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> Microsoft WindowsXP № лицензии 44039700, Microsoft Office - 2010 № лицензии 49379849 <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: 2 ГИС, 7-Zip, Adobe License: Adobe Flash Player; Adobe Reader, AIMP3, BurnAware Free, CCleaner, Defraggler, Far Manager, Firebird, Foxit Reader, GNU (Geniral Public, cense или аналог) Version 2: Auda City; Blender; DB Designer; FileZilla; Inscapе; Open Office 4; Virtual Dub, VLC Media player; Oracle Vertual Box, GNU (Geniral Public License или аналог) Version 3, Gimp; K-LiteKodecPack, XAMPP, Google Chrome, HEFS, IBExpert, MyTestX, Notepad++, Pascal ABC, Денвер, ictnзор, InternetCensor, Non Vigul Desktop Access (NVDA) Айрен v2.3– редактор тестов, LibreOffice	Российская Федерация, 659300 г. Бийск, ул. Советская, 9, учебный корпус 3
Ауд. 133 Компьютерный класс Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации Специализированная мебель. Технические средства обучения: компьютеры, ноутбуки, наличие подключения к сети Интернет. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> OC Windows 10 PRO, Microsoft Windows 10 Home Контракт № 19/6 – ЭА от 18.11.2019 Класс VR: Контракт № 19/2 – ЭА от 18.11.2019 <i>Movavi Video Editor Academic Edition 2020 Лицензионный договор на использование программного обеспечения от 26.02.2021г.</i> <i>Movavi Photo Editor 6 Лицензионный договор на использование программного обеспечения от 26.02.2021г</i> <i>Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)</i> СУБД Ред Базы Данных Соглашение № 441/11-21У от 30.11.21г. ООО «Ред Софт» Акт приема передачи прав 06.12.2021г. Соглашение о конфиденциальности №440/11-21К Программный продукт ГЕМБАФЕЙС Соглашение № 441/11-21У от 30.11.21г. ООО «Ред Софт» Акт приема передачи прав 25.02.2022г. Соглашение о конфиденциальности №440/11-21К СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: 2 ГИС, 7-Zip, Adobe License: Adobe Flash Player; Adobe Reader, AIMP3, BurnAware Free, CCleaner, Defraggler, Far Manager, Firebird, Foxit Reader, GNU (Geniral Public, cense или аналог) Version 2: Auda City; Blender; DB Designer; FileZilla; Inscapе; Open Office 4; Virtual Dub, VLC Media player; Oracle Vertual Box, GNU	Российская Федерация, 659300 г. Бийск, ул. Советская, 9, учебный корпус 3

(General Public License или аналог) Version 3, Gimp; K-LiteCodecPack, XAMPP, Google Chrome, HEFS, IBExpert, MyTestX, Notepad++, Pascal ABC, Денвер, ictnzor, InternetCensor, Non Visual Desktop Access (NVDA) Айрен v2.3 – редактор тестов, LibreOffice	
Ауд. 154-167 Технопарк универсальных педагогических компетенций Комплект учебной мебели, флипчарт. Технические средства: Атомные спектры двуэлектронных систем He, Hg, камера для триногулярных микроскопов, комплект для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации, программно-аппаратный комплекс топографического изучения строения организма человека, ресурсный набор анализа материалов для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации, съёмная рентгеновская трубка Mo tube, съёмная рентгеновская трубка W tube, тринокулярный микроскоп для преподавателя 1000x, предметный столик, план-ахроматическая "бесконечная оптика", лабораторный набор по генетике и материалы , трис-боратный буфер для электрофореза, шлем виртуальной реальности профессиональный HTC Vive Cosmos, шлем виртуальной реальности профессиональный HTC Vive Focus Plus, очки дополненной реальности Erpson, камера 360 профессиональная Insta360 Pro, камера 360 любительская Insta360 One, стационарный персональный компьютер Parus 2021, интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> Интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением ПО Ikar Notebook Контракт 29-ЭА от 12.11.21 ООО «Рудисплекс» Программно-аппаратный комплекс топографического изучения строения организма ПО 3datlas Контракт 12-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» Оборудование для проведения экспериментов по лучевой диагностике и визуализации (рентгенография) Контракт 13-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» Профессиональные оптические приборы ПО TouP Cam Контракт 14-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» Учебно-демонстрационное оборудование (Цифровая лаборатория по физике ПО Releon Lite 3.63) Контракт 15-ЭА от 18.10.21 ООО «Научные проборы и системы» «VR» - оборудование Контракт 22-ЭА от 28.10.2021 ИП Кузьменко Денис Евгеньевич Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370) СПО по лицензионным соглашениям в свободном распространении, в том числе по GNUGeneralPublicLicense и аналогам: Adobe Reader, 7-Zip, Google Chrome, Far Manager, Libre Office	Российская Федерация, 659333, Алтайский край, г. Бийск, ул. Владимира Короленко, д. 53
Ауд. 1-102 Кабинет для проведения занятий технологической направленности Комплект учебной мебели. Технические средства: интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением, ноутбуки, образовательный конструктор с комплектом датчиков, образовательный набор по механике, мехатронике и робототехнике (6 комплектов), образовательный набор по электронике, электромеханике и микропроцессорной технике, образовательный набор для изучения многокомпонентных робототехнических систем и манипуляционных роботов, комплект для изучения операционных систем реального времени и систем управления автономных мобильных роботов, четырёхосевой учебный робот-манипулятор с модульными сменными насадками, комплект полей и соревновательных элементов, образовательный модуль для углубленного изучения механики, мехатроники и САУ, лаборатория исследования окружающей среды, альтернативных источников энергии, материалов и инженерных конструкций, автономный робот манипулятор с колесами всенаправленного движения, базовый робототехнический набор, ресурсный робототехнический набор, датчик цвета базового робототехнического набора, ультразвуковой датчик базового робототехнического набора, зарядное устройство, образовательный набор по изучению технологий реверсивного инжиниринга, образовательный набор по изучению аддитивных технологий и быстрого прототипирования, станок лазерной резки с числовым программным управлением и системой фильтрации воздуха. <i>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</i> ПО Microsoft Win 10 Professional 32/64 bit SP2 Only USB RS Box Контракт 14/1 от 03.12.21 ООО «Парус Плюс» Microsoft Office - 2019 (коробочная версия) Договор пожертвования от 06.05.2022 Цифровые лаборатории по физике, химии, биологии ПО Releon Camera 1.1, Releon Lite 3.63 Контракт 51-ЭА от 30.11.21 ООО «Константа» Оборудование технологического профиля (Роботы, 3d сканер, 3d принтер) Контракт 7-ЭА от 23.09.21 ООО «Константа» Учебно-исследовательские лаборатории биосигналов и нейротехнологий ПО BiTronies Studio 5.1.10 Контракт 5-ЭА от 23.09.21 ООО «Спецкомплект» Цифровые микроскопы ПО TouP Cam Контракт 4-ЭА от 20.09.21 ИП Вебер Ольга Сергеевна Интерактивный комплекс с вычислительным блоком и мобильным креплением ПО Ikar Notebook Контракт 29-ЭА от 12.11.21 ООО «Рудисплекс» ПАК NITRINO Контракт №55-ЭА от 30.11.2021 ООО «Парус Плюс» Станок лазерной резки с ЧПУ и системой фильтрации воздуха (облачный режим www.gweikecloud.com) Контракт №10 от 18.10.2021г. ООО «УК «Восточная Сибирь» Антивирус Касперского Сублицензионный договор СЦ-00001380от 01.03.2023 Лицензия № 26FE-230306-093724-9-35565(370)	Российская Федерация, 659333, Алтайский край, г. Бийск, ул. Владимира Короленко, д. 53

10. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

10.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Изучение курса теории чисел и числовых систем является важной частью теоретической и практической подготовки будущего учителя математики и информатики.

Согласно программе дисциплины, двухсеместровый курс теории чисел и числовых систем разделен на 8 разделов, каждый из которых решает определенные задачи.

В седьмом семестре студенты изучают 4 раздела, относящихся к первой части дисциплины – теории чисел. Изучение этих разделов имеет важное значение не только в профессионально-предметной подготовке учителя математики, но также является теоретической основой для изучения ряда дисциплин в области информатики.

Преподаватель на лекциях и практических занятиях этой части курса должен уделить особое внимание усвоению студентами основополагающих фактов теории делимости, а также теории сравнений в кольце целых чисел, положенных в основу построения модулярной арифметики, составляющей фундамент компьютерной алгебры и теории защиты информации.

Прикладной характер этой части курса предъявляет свои требования к формам контроля этого семестра. По первому разделу необходимо провести аудиторную контрольную работу и коллоквиум, проверяющих усвоение теоретического материала и наличие необходимых практических навыков. По разделу «Сравнения в кольце целых чисел» предполагаются индивидуальное домашнее задание и проверочная работа, проверяющие усвоение методов решения линейных сравнений и их систем, умений применять полученные знания при решении задач на арифметические приложения теории сравнений. Контрольный опрос по основным понятиям этого раздела обязателен. Итоговый тест включает задания по всем основным дидактическим единицам, необходимым для освоения в 4 семестре.

Допуск к экзамену осуществляется только при выполнении всех видов практических работ. Студент, успешно отчитавшийся по всем формам контроля (коллоквиум по первому разделу, теоретический опрос по 2-му разделу, ИДЗ, контрольная работа по теории делимости, проверочные работы по теории сравнений и цепным дробям, итоговый тест), по его желанию может быть освобожден от экзамена с выставлением оценки по рейтингу. Рейтинговая оценка на экзамене может быть улучшена не более, чем на 30%.

В восьмом семестре студенты изучают 4 раздела, объединенные общим названием – «числовые системы». Теоретический материал этих разделов играет важную роль в формировании представлений студентов об аксиоматическом методе в математике, направлен на систематизацию и обобщение сформированных в школе представлений о числе, на расширение объема и содержания понятия числа у будущего учителя математики.

В начале курса на первых двух практических занятиях необходимо повторение необходимых фактов из курса высшей алгебры, без знания которых невозможно глубокое усвоение содержания аксиоматических теорий классических числовых систем. После проведения этих занятий проводится контрольный опрос по теоретическим основам числовых систем. Опрос засчитывается при правильном ответе не менее чем на 80% вопросов. Параллельно с этим студенты выполняют индивидуальное домашнее задание.

В конце курса студенты сдают коллоквиум на знание формулировок аксиоматических теорий классических числовых систем (натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел) и основных свойств чисел в этих системах.

Зачет проводится в форме итогового теста, который включает задания по всем основным дидактическим единицам, необходимым для освоения в 8 семестре.

Студент, отчитавшийся в 8 семестре по всем формам контроля (теоретический опрос – не менее, чем на 80%; ИДЗ – 100% , контрольная работа – не менее, чем на 65%, коллоквиум – не менее, чем на 65%), от итогового теста освобождаются и получают зачет-автомат.

10.2 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Общая трудоемкость дисциплины, в соответствии с учебным планом, составляет 4 зачетные единицы и включает учебное время, отведенное на **лекционные, практические занятия и самостоятельную работу** студента.

Тематика лекционных и практических занятий охватывает все разделы учебной дисциплины и ориентирована на выполнение ее целей и задач в соответствии с требованиями к результатам освоения дисциплины.

На лекционных занятиях рекомендуется внимательно слушать преподавателя, конспектировать материал лекции, принимать участие в интерактивных формах, используемых преподавателем на лекции, задавать вопросы и активно отвечать на поставленные вопросы. При подготовке к лекции необходимо проработать содержание предыдущих лекций, подготовить вопросы. После лекции также следует прочитать свой конспект, ознакомиться с вариантами изложения данной темы в учебниках и учебных пособиях, и если возникают вопросы, то можно с ними обратиться к преподавателю.

Цель практических занятий - осмысление студентами теоретического материала, изложенного на лекциях, формирование умения использовать его при решении практических задач в изучаемой области, развитие навыков самостоятельной работы, умения работать с учебной литературой.

Подготовка к практическому занятию включает выполнение заданий преподавателя по теме предыдущего занятия, а также подготовку к занятию по новой теме – самостоятельное изучение материалов лекционного курса, источников обязательной и дополнительной литературы.

Самостоятельная работа является неотъемлемой частью учебного процесса. Она запланирована и структурирована таким образом, чтобы студент при подготовке к занятиям наиболее эффективно осваивал теоретический материал и получал системные знания по курсу.

Руководство самостоятельной работой студентов со стороны преподавателя заключается в оказании помощи при планировании работы по изучению курса, в разъяснении вопросов, возникающих у студентов при изучении отдельных тем курса, при подготовке к различным формам контроля, запланированным программой дисциплины.

При выполнении индивидуального домашнего задания (ИДЗ) следует обратить внимание на следующие моменты: вариант задания для каждого студента определяется его номером в списке группы; задание выполняется в отдельной тетради с подробным описанием хода решения и ссылками на соответствующий теоретический материал; проверка самостоятельности выполнения ИДЗ осуществляется преподавателем при собеседовании со студентом (защита ИДЗ).

Время, отведенное учебным планом на самостоятельную работу студента по дисциплине, составляет примерно 50% всей ее трудоемкости. Формы самостоятельной

работы по каждому разделу дисциплины перечислены в технологической карте в конце программы.

Для оценивания уровня достигнутых результатов освоения студентом каждого раздела дисциплины, а также всей дисциплины в целом, соответствия его заявленным требованиям, используется **балльно-рейтинговая система**, детально описанная в технологической карте дисциплины для каждого из двух семестров.

11.1 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Фонд оценочных средств разработан для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «**Теория чисел и числовые системы**» и входит в состав основной образовательной программы по направлению подготовки: 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (профиль «Математика и Информатика») (квалификация «Бакалавр»), реализуемой при подготовке обучающихся в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В.М. Шукшина». Фонд оценочных средств предназначен для проверки сформированности компетенций, заявленных в программе дисциплины «**Теория чисел и числовые системы**» в соответствии с учебным планом 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)» (профиль «Математика и Информатика») (квалификация «Бакалавр»).

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

- - Способен проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика (ПК-1).

Компетенции, этапы	Индикаторы	Оценочные средства
ПК-1 4 этап	Знать: - ПК-1.1: знание основы методики преподавания, основные принципы деятельностного подхода, виды и приемы современных педагогических технологий в области математики (3.1); - ПК-1.2: знание рабочей программы и методики обучения по математике (3.2);	Практико-ориентированное задание: коллоквиум, контрольная работа, ИДЗ, итоговый тест.
	Уметь: - ПК-1.3: умение планировать и проводить учебные занятия по математике (У.1); - ПК-1.4: умение использовать методы и средства педагогического мониторинга, позволяющие оценить	

	степень сформированности у детей качеств, необходимых для дальнейшего обучения и развития по математике (У.2);	
	Владеть: - ПК-1.5: владеть формами и методами обучения, в том числе выходящими за рамки учебных занятий: проектная деятельность, лабораторные эксперименты, практические занятия и т.п. (В.1).	

Компетенция ПК-1 с указанием этапа формирования в процессе освоения образовательной программы

Компетенция ПК-1 (способен проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика) формируется на четвертом этапе формирования компетенций.

Компетенция ПК-1 формировалась в процессе изучения данной дисциплины и продолжит формироваться на следующих курсах в процессе изучения других учебных дисциплин, прохождения практик и итоговой государственной аттестации (Защита выпускной квалификационной работы).

Типовое контрольное задание для оценки сформированности данной компетенции направлено на демонстрацию готовности проектировать и реализовывать программу основного и среднего общего образования в предметной области Математика.

1. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

(7 семестр)

Образец варианта контрольной работы (7 семестр)

Вариант 1

1. Сократить дробь $\frac{1073}{3683}$, используя алгоритм Евклида.
2. Какие из чисел: 631, 637, 1027, - являются простыми?
3. С помощью канонического разложения найти НОД и НОК чисел 572 и 1118.
4. Решить в натуральных числах систему уравнений: $x + y = 150$
 $\text{НОД}(x, y) = 30$.
5. Решить в целых числах уравнение $43x + 37y = 21$.
6. Выполнить указанные действия: $40042_5 : 23_5 + 1044_5 - (23_5 \cdot 34_5) =$.
7. Представить число x в указанной системе счисления его краткой и развернутой систематической записью: а) $3A9,24_{16} = x_{10}$; б) $2135,46875 = x_4$.

Критерии оценки контрольной работы:

1. Каждое задание работы оценивается в баллах; при допущенных ошибках оценка за задание снижается.
2. Задание №6 данной работы оценивается в 2 балла, остальные – в 1 балл. Максимально возможное число баллов за работу – 8 баллов.
3. При оценивании задания учитывается аккуратность оформления и подробное описание хода решения со ссылками на соответствующий теоретический материал.

4. Итоговая оценка за всю работу соответствует проценту полученного суммарного балла по отношению к максимально возможному числу баллов.
5. Положительной считается оценка за работу не менее 60%. При отрицательной оценке студент переписывает работу заново (другой вариант).
6. Студент может повысить рейтинговый балл, выполнив работу над ошибками. Рейтинговый балл за повторную работу и при работе над ошибками не может быть больше 75 %.

2. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Вопросы к коллоквиуму по теории чисел (7 семестр)

1. Отношение делимости и его простейшие свойства (доказать любые 3 свойства).
2. Деление с остатком. Теорема о делении с остатком (с доказательством!).
3. НОД и его свойства (доказать любые 2).
4. Алгоритм Евклида (с доказательством 2-х свойств НОД, лежащих в основе алгоритма), теорема Ламе; расширенный алгоритм Евклида.
5. Взаимно простые числа (доказать любые 2 свойства).
6. НОК и его свойства (доказать любые 2 свойства, в том числе - теорему о взаимосвязи н.о.д. и н.о.к.).
7. Простые числа. Свойства простых чисел (доказать свойство наименьшего простого делителя числа и основную теорему арифметики). Неравенства Чебышёва для $\pi(x)$.
8. Числовые функции (число и сумма натуральных делителей).
9. Конечные цепные дроби. Существование и единственность значения цепной дроби.
10. Подходящие дроби для данной конечной цепной дроби и их свойства (доказать любые 2 свойства, в том числе - теорему о взаимосвязи соседних подходящих дробей).
11. Систематические числа; теорема о существовании и единственности представления натурального числа в виде систематической записи по любому основанию $q > 1$; переход из одной системы счисления в другую; арифметические операции над систематическими числами.
12. Решение неопределенных уравнений первой степени $ax + by = c$ (с помощью алгоритма Евклида, расширенного алгоритма Евклида, с помощью подходящих дробей).

Критерии оценки ответа на вопросы коллоквиума:

1. Коллоквиум проводится в письменной форме по билетам: первый вопрос из программы коллоквиума предполагает полный ответ с доказательством одной из теорем, второй вопрос предполагает формулировку определений понятий с иллюстрацией их примерами.
2. Каждый вопрос билета оценивается в баллах; при допущенных ошибках и неточностях в формулировках определений и доказательстве теоремы оценка за вопрос снижается.
3. Вопрос №1 оценивается в 3 балла, №2 – в 1 балл. Максимально возможное число баллов за работу – 4 балла.
4. При оценивании ответа учитывается: правильность формулировок; установление взаимосвязи теории и практики; содержательность и аргументированность, полнота и структурная логичность доказательства; глубина знаний вопроса.

5. Итоговая (рейтинговая) оценка за коллоквиум соответствует проценту полученного суммарного балла по отношению к максимально возможному числу баллов.
6. Положительной считается оценка не менее 60%. При отрицательной оценке студент пересдает коллоквиум заново (другой билет, и не более 2-х раз).
7. Рейтинговый балл за повторную пересдачу не может быть больше 75 %.

3. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Образец варианта индивидуального домашнего задания (7 семестр)

Вариант №1

1. Доказать, что для любого натурального n $7^n + 11 \cdot 3^n$ кратно 4.
2. Для чисел $a = 3441$, $b = 414$ найти НОД ($a; b$) и НОК ($a; b$) с помощью алгоритма Евклида; найти представление НОД ($a; b$) в виде линейной комбинации чисел a и b .
3. Найти число натуральных делителей числа 4820.
4. С помощью канонического разложения найти НОД и НОК чисел 572 и 1118.
5. Выбрать простые числа из отрезка натурального ряда от 610 до 650.
6. Выполнить указанные действия: $12223_5 : 24_5 + 1043_5 - (23_5 \cdot 34_5) =$.
7. Представить число x в указанной системе счисления его краткой и развернутой систематической записью: а) $3A7,42_{16} = x_{10}$; б) $3276,46875 = x_4$.
8. Решить уравнение $59x + 17y = 7$ четырьмя способами: с помощью алгоритма Евклида, расширенного алгоритма Евклида, используя свойства подходящих дробей, сведением к сравнению.
9. Найти остаток от деления $3^{81} + 7^{164}$ на 25.
10. Решить сравнения (использовать метод преобразования коэффициентов, формулу Эйлера, подходящие дроби):
 $4x \equiv 18(\text{mod } 15)$;
 $14x \equiv 50(\text{mod } 62)$;
 $113x \equiv 89(\text{mod } 311)$.
11. Решить систему сравнений используя метод последовательной подстановки и китайскую теорему об остатках:

$$\begin{cases} 3x \equiv 5(\text{mod } 13); \\ 2x \equiv 17(\text{mod } 21); \\ 5x \equiv 31(\text{mod } 32). \end{cases}$$
12. Найти порядок класса вычетов $\bar{9}$ по модулю 19. Какие еще классы вычетов по модулю 19 имеют тот же порядок?
13. Решить сравнения : $21x^4 \equiv 5(\text{mod } 43)$, $8^x \equiv 1(\text{mod } 23)$ используя свойства индексов и таблицы индексов.
14. Найти длину предпериода и длину периода десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 350 .

Критерии оценки заданий ИДЗ:

1. Каждое задание ИДЗ оценивается в 1 балл; при допущенных ошибках оценка за задание снижается.
2. При оценивании задания учитывается аккуратность оформления и подробное описание хода решения со ссылками на соответствующий теоретический материал.
3. Итоговая оценка за всю работу соответствует проценту полученного суммарного балла по отношению к общему числу баллов за все ИДЗ.

4. Оценка за ИДЗ не менее 60% считается положительной. При отрицательной оценке студент выполняет работу над ошибками; рейтинговый балл за повторную работу не может быть больше 75 %.
5. Оценка аннулируется, если на защите ИДЗ (при собеседовании с преподавателем) студент не подтвердил самостоятельность его выполнения.
6. Оценка за ИДЗ снижается при несоблюдении сроков его сдачи: минус 1% за каждый просроченный день.

4. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Образец варианта проверочной работы по теории сравнений (7 семестр)

Вариант № 1

1. Найдите остаток от деления 359 на 17.
2. Решите сравнения: а) $14x \equiv 30 \pmod{21}$; б) $12x \equiv 52 \pmod{16}$; в) $5x \equiv 11 \pmod{23}$.
3. Решите систему сравнений
$$\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{13}; \\ 2x \equiv 17 \pmod{21}; \\ 5x \equiv 31 \pmod{32}; \end{cases}$$

Примечание. Задание №1 данной работы оценивается в 2 балла, №2 – в 1,2 балла (по 0,4 за каждое сравнение). Максимально возможное число баллов за работу – 4,2 балла.

Образец варианта проверочной работы по цепным дробям (7 семестр)

Вариант №1

1. Разложить в цепную дробь и заменить подходящей дробью с точностью до 0,001 число $\sqrt{29}$.
2. Найти значение цепных дробей:
 - а) конечной цепной дроби $[2; 3, 1, 7, 4, 2, 3, 5]$;
 - б) бесконечной периодической цепной дроби $[2; (3, 1)]$; составить уравнение, один из корней которого равен этому числу.
3. Решить в целых числах уравнение $59x - 27y = 7$ с помощью аппарата цепных дробей.

Примечание. Каждое задание данной работы оценивается в 1 балл. Максимально возможное число баллов за работу – 4 балла (задания 2а и 2б оцениваются отдельно).

5. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Образец варианта контрольного опроса по теории сравнений (7 семестр)

Вариант № 1

1. Запишите соотношение, равносильное данному: $a \equiv b \pmod{m}$.
2. Запишите полную и приведенную системы вычетов по модулю 12.
3. Сформулируйте теорему Эйлера и ее частный случай – теорему Ферма.
4. Что называется решением сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$? Приведите пример.
5. Сколько решений может иметь сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ в случае его разрешимости?
6. Приведите пример сравнения $ax \equiv b \pmod{12}$
 - а) не имеющего решений;
 - б) имеющего 1 решение;
 - в) имеющего 3 решения.
7. Дайте определение показателя (порядка) класса вычетов по модулю m .
8. Какие значения могут принимать показатели классов вычетов по модулю 52?
9. Сколько существует классов вычетов с показателем δ по простому модулю p ? Приведите пример в случае $\delta = 26$ и $p = 53$.
10. Какое число называется первообразным корнем по простому модулю p ? Какой показатель имеет первообразный корень по модулю 43?
11. Чему равно число первообразных корней по простому модулю p ? Сколько их в случае $p = 47$?
12. Зная, что 10 является первообразным корнем по модулю 17, найдите остальные первообразные корни по этому модулю.
13. Что называется индексом числа a по простому модулю p при основании q ?
14. При помощи таблиц индексов решите сравнение $21x^4 \equiv 5 \pmod{43}$.
15. В чем заключаются достаточные условия возможности представления несократимой обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$: а) в виде конечной q -ичной дроби; б) в виде чисто периодической q -ичной дроби; в) в виде смешанной периодической q -ичной дроби? Как эти условия формулируются, если $q = 10$?
16. Установите вид десятичных дробей, которые получаются при обращении обыкновенных дробей: $\frac{3}{25}; \frac{1}{14}; \frac{1}{33}; \frac{3}{45}$
17. Как находится длина периода и длина предпериода при обращении обыкновенной дроби в q -ичную?
18. Найдите длину предпериода и длину периода десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 18.
19. Сформулируйте общий признак делимости Паскаля.
20. Сформулируйте признаки делимости на 3, 4, 9, 11 в десятичной системе счисления. Приведите примеры.
21. Выведите признак делимости на m в системе счисления с основанием q при $m = 4, q = 7$.

Критерии оценки контрольного опроса:

1. Каждый вопрос оценивается в 1 балл.
2. Итоговая оценка за весь опрос соответствует проценту правильных ответов по отношению к общему числу всех вопросов.
3. Оценка за опрос считается положительной, если студент ответил правильно не менее, чем на 60% всех вопросов.

Итоговый тест

по теории чисел и числовым системам (7 семестр)

Дидактические единицы:

1. Делимость и простые числа.
2. Систематические числа.
3. Отношение сравнения в кольце $\mathbf{Z}$ и его основные свойства.
4. Сравнения и системы сравнений с неизвестной величиной.
5. Показатели (порядки) чисел и классов вычетов по данному модулю. Индексы чисел и классов вычетов по данному модулю.
6. Двучленные сравнения по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты.
7. Арифметические приложения теории сравнений.
8. Представление действительных чисел цепными дробями.

1. ДЕЛИМОСТЬ И ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

1. При делении целого числа a на некоторое целое положительное число b частное равно q , а остаток r . Какие из утверждений при этом являются верными?
1) $a=bq+r, 0 \leq r < b$; 2) $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(b,r)$; 3) $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(q,r)$;
4) При делении $-a$ на b остаток равен $-r$. 5) При делении $-a$ на b остаток равен $b-r$.
2. При делении a на 7 остаток равен 2. Остаток при делении a^5 на 7 равен
3. Наибольший общий делитель для чисел 589 и 713 находится в интервале
1) (0;9); 2) (9;20); 3) (22;30); 4) (30;35).
4. Наименьшее общее кратное чисел 952 и 588 равно ...
5. Простое число 2 входит в каноническое разложение любого натурального делителя числа $a=5544$ с показателем степени α таким, что
1) $\alpha=3$; 2) $\alpha \leq 3$; 3) $\alpha \geq 3$; 4) $\alpha = 4$.
6. Пусть числа a , b и c представлены в виде $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, $c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\gamma_k}$, где все p_i – попарно различные простые числа, а все $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$. Завершите каждое из предложений соответствующим ему заключением так, чтобы получилось верное утверждение:
1) Если $c=\text{НОД}(a,b)$, то ...; 2) Если c – общий делитель чисел a и b , то ...;
3) Если $c=\text{НОК}(a,b)$, то ...; 4) Если c – общее кратное чисел a и b , то ...;
5) Если c не является общим делителем чисел a и b , то
а) $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i=1,2,\dots,k$. б) $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i=1,2,\dots,k$. в) $\gamma_i \leq \min\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i=1,\dots,k$.
г) $\gamma_i \geq \max\{\alpha_i, \beta_i\}$, $i=1,\dots,k$. д) $\gamma_i > \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ для некоторых i ($1 \leq i \leq k$).
7. Какие из следующих чисел являются простыми?
1) 473; 2) 273; 3) 149; 4) 281; 5) 119.
8. Какие из утверждений являются верными?

- 1) Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и на 9.
- 2) Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и на 3.
- 3) Число делится на 12 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 6.
- 4) Число делится на 12 тогда и только тогда, когда оно делится на 4 и на 3.

9. Простое число 3 входит в каноническое разложение любого натурального кратного числа $a=2520$ с показателем степени α таким, что

- 1) $\alpha \geq 3$; 2) $\alpha = 2$; 3) $\alpha \leq 2$; 4) $\alpha \geq 2$.

10. Для чисел $a=2^8 \cdot 3^{15} \cdot 7^{21}$ и $b=2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 7^{15}$ их наибольший общий делитель равен

- 1) $2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^{14} \cdot 7^{21}$; 2) $2^8 \cdot 3^{15} \cdot 7^{15}$; 3) $2^8 \cdot 5^{14} \cdot 7^{15}$; 4) $2^8 \cdot 7^{15}$.

11. Для чисел $a=2^8 \cdot 3^{15} \cdot 7^{21}$ и $b=2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 7^{15}$ их наименьшее общее кратное равно

- 1) $2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^{14} \cdot 7^{21}$; 2) $2^{12} \cdot 5^{14} \cdot 7^{21}$; 3) $2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 7^{21}$; 4) $2^{20} \cdot 3^{15} \cdot 5^{14} \cdot 7^{36}$.

12. При делении на -142 может получиться остаток

- 1) 187; 2) -45 ; 3) 56; 4) -160 .

13. Остаток от деления числа -135 на 14 равен

- 1) 9; 2) -9 ; 3) 5; 4) -5 .

2. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

1. Число 43041_5 в шестиричной системе счисления запишется как

- 1) 42212_6 ; 2) 2424_6 ; 3) 21224_6 ; 4) 531133_6 .

2. Число 110101011_2 в восьмичной системе счисления запишется как

- 1) 356_8 ; 2) 653_8 ; 3) 642_8 ; 4) 753_8 .

3. Число 1110101011_2 в шестнадцатичной системе счисления запишется как

- 1) 31011_{16} ; 2) $3(10)11_{16}$; 3) $38(12)_{16}$; 4) $3(10)(11)_{16}$.

4. Основание q в системе счисления, в которой выполняется равенство $364_q = 3001_4$, равно ...

5. Таблица

	4	5	6
6	20_q	26_q	30_q
7	24_q	$2(11)_q$	36_q
8	28_q	34_q	40_q

является частью таблицы умножения в системе счисления с основанием q , равным ...

6. Число 10032_4 в десятичной системе счисления запишется как

- 1) 1038; 2) 78; 3) 270; 4) 288.

7. $40042_5 : 23_5 + 1044_5 =$

- 1) 2333_5 ; 2) 2223_5 ; 3) 3223_5 ; 4) 3334_5 .

8. $325041_7 - 235_7 \cdot 46_7 =$

- 1) 313231_7 ; 2) 310631_7 ; 3) 143021_7 ; 4) 306536_7 .

9. Число 148 в восьмичной системе счисления запишется как

- 1) 422_8 ; 2) 224_8 ; 3) 24_8 ; 4) 242_8 .

10. Равенство $254+345=1043$ возможно в системе с основанием $q=\dots$
11. Число 46 записывается теми же цифрами, но в обратном порядке в системе счисления с основанием 1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 12.
12. Равенство $45=231_q$ выполняется, если основание системы счисления q равно ...
1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 8.

3. ОТНОШЕНИЕ СРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ Z И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1. Для целых чисел a, b, m ($m \neq 0$) утверждение $a \equiv b \pmod{m}$ не равносильно утверждению
1) $a = mq + b$ ($q \in \mathbb{Z}$); 2) $(a-b) \vdots m$; 3) a и b имеют одинаковые остатки при делении на m ;
4) $a = bm$.
2. Утверждение «число n имеет вид $10k+3$ » равносильно сравнению
1) $n \equiv 10 \pmod{3}$; 2) $n \equiv 3 \pmod{10}$; 3) $10 \equiv 3 \pmod{n}$; 4) $n \equiv k \pmod{10}$.
3. Установите соответствие между равносильными утверждениями:
1) a и c имеют одинаковые остатки при делении на b ($b \neq 0$) а) $a \equiv b \pmod{c}$
2) $(a-b) \vdots c$ б) $a \equiv 0 \pmod{b}$
3) $a \vdots b$ в) $c \equiv b \pmod{a}$
4) $c = b + ak, k \in \mathbb{Z}$ г) $a \equiv c \pmod{b}$
4. Равенства $\bar{7} + \bar{7} = \bar{5}$ и $\bar{7} \cdot \bar{7} = \bar{4}$ имеют место в кольце классов вычетов по модулю m
1) $m=8$; 2) $m=9$; 3) $m=10$; 4) $m=11$.
5. Мультипликативную группу образует следующая совокупность классов вычетов по модулю $m=6$:
1) $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$; 2) $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$; 3) $\{\bar{1}, \bar{5}\}$; 4) $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.
6. Полями являются кольца классов вычетов по модулю m
1) $m=2$; 2) $m=7$; 3) $m=8$; 4) $m=9$.
7. Для класса $\bar{3} \pmod{8}$ обратным является класс: 1) $\bar{1}$; 2) $\bar{6}$; 3) $\bar{5}$; 4) $\bar{3}$.
8. Полную систему вычетов по модулю $m=5$ образует совокупность чисел:
1) $\{0, 7, -7, 13, 15\}$; 2) $\{-16, -15, -24, 32, 48\}$; 3) $\{4, 19, 61, 82, 5\}$; 4) $\{72, 62, 50, 21\}$.
9. Количество натуральных чисел, не превосходящих $a=125$ и взаимнопростых с a , равно ...
10. Приведённой системой вычетов по модулю $m=12$ является совокупность чисел
1) $\{0, 1, 17, 23\}$; 2) $\{1, 3, 5, 7, 11\}$; 3) $\{-47, 17, 31, -1\}$; 4) $\{-13, 17, 19, 23, 25\}$.
11. Остаток от деления 3^{126} на 5 равен: 1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 9.
12. Последняя цифра в десятичном представлении числа 3^{126} равна: 1) 4; 2) 3; 3) 1; 4) 9.

13. Последние две цифры в десятичном представлении числа 3^{243} равны:
1) 81; 2) 27; 3) 43; 4) 29.
14. Скольким классам вычетов по модулю 21 принадлежат вычеты из одного класса по модулю 7?
1) 1; 2) 7; 3) 3; 4) 21.
15. Решением уравнения $\bar{3} - \bar{x} = \bar{7}$, где $\bar{3}$ и $\bar{7}$ – классы вычетов по модулю 11, является класс
1) $\bar{7}$; 2) $\bar{8}$; 3) $\bar{9}$; 4) $\bar{10}$.
16. Мультипликативную группу обратимых элементов образует следующая совокупность классов вычетов по модулю 8.
1) $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$; 2) $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$; 3) $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}\}$; 4) $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$.
17. Количество классов в мультипликативной группе обратимых элементов по модулю 28 равно: 1) 12; 2) 14; 3) 7; 4) 4.
18. Количество элементов мультипликативной группы обратимых элементов по модулю 29 равно: 1) 16; 2) 14; 3) 28; 4) 29.

4. СРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

1. Степень сравнения $36x^6 + 18x^5 - 6x^4 - 4x^3 + x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{6}$ равна: 1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3.
2. Сравнение $20x^3 - 19x^2 + 15x + 6 \equiv 0 \pmod{5}$ равносильно сравнению:
1) $4x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; 2) $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; 3) $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$; 4) $3x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$.
3. Число решений сравнения $ax \equiv b \pmod{11}$ может быть равно: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 11.
4. Число решений сравнения $ax \equiv b \pmod{10}$ в случае его разрешимости не может быть равным: 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.
5. Сравнение $ax \equiv 18 \pmod{30}$ в зависимости от принимаемого значения a может иметь различное количество решений. Установите соответствие между значением a и числом решений сравнения $ax \equiv 18 \pmod{30}$:
- | | |
|------------|-------|
| 1) $a=7$; | а) 0; |
| 2) $a=6$; | б) 1; |
| 3) $a=5$; | в) 3; |
| 4) $a=3$. | г) 6. |
6. Решением сравнения $13x \equiv 4 \pmod{5}$ является класс вычетов: 1) $\bar{1}$; 2) $\bar{2}$; 3) $\bar{3}$; 4) $\bar{4}$.
7. Решением сравнения $15x \equiv 9 \pmod{6}$ не является класс вычетов: 1) $\bar{1}$; 2) $\bar{2}$; 3) $\bar{3}$; 4) $\bar{5}$.
8. Число решений сравнения n -ой степени $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$, где p – простое число, большее n , не может быть:
1) равным n ; 2) меньшим n ; 3) большим n ; 4) равным p .

9. Неразрешимыми являются системы сравнений:

$$1) \begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{4}; \\ 3x \equiv 2 \pmod{5}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{3}; \\ 3x \equiv 2 \pmod{4}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5}; \\ x \equiv 2 \pmod{3}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}; \\ 3x \equiv 2 \pmod{6}. \end{cases}$$

10. Решением системы сравнений
$$\begin{cases} a_1x \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ a_2x \equiv b_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

в случае её разрешимости является класс вычетов по модулю

1) $m=m_1+m_2$; 2) $m=\text{НОД}(m_1, m_2)$; 3) $m=\text{НОК}(m_1, m_2)$; 4) $m=m_1 \cdot m_2$.

11. Чтобы найти числа, которые при делении на 4 и 5 дают, соответственно, остатки 2 и 3, надо решить систему сравнений

1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{4} \\ 3x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod{5} \\ 5x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{2} \\ x \equiv 5 \pmod{3} \end{cases}$.

5. ПОКАЗАТЕЛИ (ПОРЯДКИ) ЧИСЕЛ И КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ ПО ДАННОМУ МОДУЛЮ

1. Конечный порядок имеют следующие классы вычетов по модулю 14:

1) $\bar{2}$; 2) $\bar{3}$; 3) $\bar{4}$; 4) $\bar{5}$.

2. Порядки классов вычетов по модулю 13 могут принимать значения: 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 9.

3. Порядки классов вычетов по модулю 24 не могут принимать значение:

1) 2; 2) 1; 3) 8; 4) 6.

4. Количество классов вычетов порядка 9 по модулю 37 равно: 1) 3; 2) 6; 3) 9; 4) 12.

5. Из следующих утверждений определением порядка класса вычетов по модулю m является:

1) порядком класса вычетов $\bar{a}$ по модулю m называется натуральное число δ , такое, что $\bar{a}^\delta = \bar{1}$;

2) порядком класса вычетов $\bar{a}$, взаимно простого с модулем m , называют наименьшее число δ , такое, что $\bar{a}^\delta = \bar{1}$;

3) порядком класса вычетов $\bar{a}$, взаимно простого с модулем m , называют наименьшее натуральное число δ , такое, что $\bar{a}^\delta = \bar{1}$.

6. Порядок класса $\bar{2}$ по модулю 17 равен 16. Из следующих утверждений справедливы:

1) $\bar{2}^{48} = \bar{1}$; 2) $\bar{2}^{15} = \bar{2}^{31}$; 3) $\bar{2}^{12} = \bar{2}^{30}$; 4) $\bar{2}^{34} = \bar{1}$.

7. Порядок класса $\bar{2}$ по модулю 17 равен 8. Тот же порядок по модулю 17 имеют классы:

1) $\bar{2}^4$; 2) $\bar{2}^5$; 3) $\bar{2}^7$; 4) $\bar{2}^8$.

8. Порядок класса $\bar{2}$ по модулю 17 равен 8. Порядок класса $\bar{2}^{10}$ по модулю 17 равен

1) 4; 2) 6; 3) 8; 4) 10.

9. Первообразным корнем по простому модулю p называют класс вычетов $\bar{q}$ по этому модулю, порядок которого равен ... 1) p ; 2) $p-1$; 3) $4(p-1)$; 4) q .

10. Количество первообразных корней по модулю 19 равно ... 1) 18; 2) 9; 3) 6; 4) 2.

11. Показателю 5 по модулю 11 принадлежат числа ... 1) 3; 2) -8; 3) 125; 4) 15.

12. Пусть p – простое число и q – первообразный корень по модулю p . Число γ называется ... (вставить слово) числа x по модулю p при основании q , если $q^\gamma \equiv x \pmod{p}$.

1) показателем; 2) вычетом; 3) порядком; 4) индексом.

13. Индекс числа 35 по модулю 19 при основании 2 равен ... 1) 4; 2) 7; 3) 16; 4) 18.

14. Показатель числа 8 по модулю 23 является ...

1) решением сравнения $8^x \equiv 1 \pmod{23}$; 2) решением сравнения $8^x \equiv 1 \pmod{22}$;

3) наименьшим натуральным решением сравнения $8^x \equiv 1 \pmod{23}$;

4) наименьшим неотрицательным решением сравнения $8^x \equiv 1 \pmod{22}$.

15. Число γ является индексом числа x по модулю 13 при основании 2 (установите соответствие):

	γ		x
1)	3	а)	1
2)	4	б)	2
3)	1	в)	3
4)	0	г)	8

16. Вместе с числом 11 индексами числа 7 по модулю 13 при основании 2 являются числа ...

1) 23; 2) 24; 3) 37; 4) 35.

17.. Известно, что $\text{ind}_2 6 \equiv 5 \pmod{13}$, $\text{ind}_2 7 \equiv 11 \pmod{13}$. Тогда $\text{ind}_2 42$ может быть равен:

1) 3; 2) 4; 3) 16; 4) 55.

6. ДВУЧЛЕННЫЕ СРАВНЕНИЯ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ. КВАДРАТИЧНЫЕ ВЫЧЕТЫ И НЕВЫЧЕТЫ

1. Наименьшими положительными квадратичными вычетами по модулю 13 являются числа:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 10; 5) 11.

2. Наименьшими положительными квадратичными невычетами по модулю 13 являются числа: 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 6; 5) 8.

3. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 9 \pmod{13}$? 1) 0; 2) 2; 3) $\varphi(13)$; 4) 1.

4. Сколько решений имеет сравнение $x^2 \equiv 11 \pmod{13}$? 1) 0; 2) 1; 3) 2.

5. Разрешимо ли сравнение $x^2 \equiv 2 \pmod{67}$?

1) да; 2) нет.

6. Символ Лежандра $\left(\frac{2}{1097}\right)$ равен

1) 1; 2) -1.

7. Сравнение $x^2 \equiv 63 \pmod{131}$

1) разрешимо; 2) не разрешимо.

8. Утверждение « a является квадратичным вычетом по простому модулю p » равносильно утверждению

- 1) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$; 2) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$; 3) символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$;
 4) символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$; 5) сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$ разрешимо;
 6) сравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$ не разрешимо;

7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СРАВНЕНИЙ

1. В конечную десятичную дробь обращаются ... 1) $\frac{11}{35}$; 2) $\frac{12}{17}$; 3) $\frac{7}{125}$; 4) $\frac{73}{200}$.
2. В чистую периодическую десятичную дробь обращаются 1) $\frac{13}{45}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) $\frac{5}{36}$; 4) $\frac{16}{85}$; 5) $\frac{29}{51}$.
3. В смешанную периодическую десятичную дробь обращаются 1) $\frac{13}{45}$; 2) $\frac{17}{24}$; 3) $\frac{16}{33}$; 4) $\frac{43}{250}$; 5) $\frac{16}{51}$.
4. Длина периода десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем 21, равна 1) 4; 2) 3; 3) 6; 4) 7.
5. Число цифр между запятой и периодом десятичной дроби, в которую обращается обыкновенная несократимая дробь со знаменателем $2^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19$ равна 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.
6. Смешанная периодическая десятичная дробь 0,35(62) записывается обыкновенной несократимой дробью 1) $\frac{3527}{9900}$; 2) $\frac{357}{990}$; 3) $\frac{1781}{4950}$; 4) $\frac{1781}{5000}$.
7. Чтобы число $55 \cdot 617$ делилось на 13, третья слева цифра должна быть равна 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 7.
8. Чтобы число $9 \cdot 5784$ делилось на 33, вторая слева цифра должна быть равна 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5; 5) 0.
9. Чтобы число $11280 \cdot$ делилось на 77, его первая справа цифра должна быть равна 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.
10. Делятся на 7 числа 1) $1^{18} + 2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18} + 1$; 2) 454111; 3) $5^{25} + 2$; 4) $5^{61} - 3$; 5) $5^{121} + 1$.
11. Остаток от деления числа 3^{1693} на 13 равен 1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 7.
12. Остаток от деления $3^{72} + 5^{51}$ на 11 равен 1) 3; 2) 4; 3) 7; 4) 8.
13. Остаток от деления 46^{914} на 21 равен 1) 1; 2) 12; 3) 16; 4) 18.
14. Последняя цифра в десятичной записи числа 3^{100} равна 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
15. Последние две цифры в десятичной записи числа 17^{402} равны 1) 59; 2) 73; 3) 89; 4) 62.
16. Пусть число a представлено в q -ичной системе счисления своей систематической записью $a = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$ и пусть сумма всех его цифр делится на m :

$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)!m$. Тогда m и q могут быть такими:

- 1) $q=8, m=7$; 2) $q=10, m=11$; 3) $q=8, m=9$; 4) $q=10, m=3$.

17. Пусть число a представлено в q -ичной системе счисления своей систематической записью $a = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0$ и пусть разность между суммами цифр на чётных и нечётных местах делится на m . Тогда q и m могут быть такими:

- 1) $q=7, m=4$; 2) $q=8, m=7$; 3) $q=10, m=11$; 4) $q=10, m=9$.

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

1. Обыкновенная дробь $\frac{12}{5}$ представима конечной цепной дробью

- 1) $[3; 1, 1, 2]$; 2) $[3; 1, 2]$; 3) $[3; 1, 1, 2, 2]$.

2. Подходящие дроби $\delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ конечной цепной дроби, в которую разлагается рациональное число $\frac{a}{b}$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\delta_2 < \delta_3 < \delta_4 < \delta_5$; 2) $\delta_2 < \delta_4 < \delta_3 < \delta_5$; 3) $\delta_2 < \delta_4 < \delta_5 < \delta_3$; 4) $\delta_2 < \delta_5 < \delta_4 < \delta_3$.

3. Подходящие дроби цепной дроби $[q_0; q_1, \dots, q_n]$

- 1) сократимы; 2) несократимы.

4. Подходящие дроби с чётными номерами дают приближение дроби $\frac{a}{b} \dots$

- 1) по недостатку; 2) по избытку.

5. Подходящие дроби с нечётными номерами дают приближение дроби $\frac{a}{b} \dots$

- 1) по недостатку; 2) по избытку.

6. Конечная цепная дробь $[2; 1, 1, 3]$ представляет несократимую дробь

- 1) $\frac{18}{7}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) $\frac{11}{7}$; 4) $\frac{11}{3}$.

7. Приближения по недостатку числа $\frac{64}{25}$ дают подходящие дроби

- 1) 2; 2) $\frac{5}{2}$; 3) $\frac{18}{7}$; 4) $\frac{23}{9}$.

8. Установите соответствие между уравнением и его частным решением:

- 1) $3x+4y=22 \leftrightarrow (2; 4)$; 2) $12x+7y=41 \leftrightarrow (4; -1)$;
3) $35x-37y=12 \leftrightarrow (-6; -6)$; 4) $36x-22y=19 \leftrightarrow$ решений нет.

9. Действительное число, которое обращается в цепную дробь $[3; (3, 6)]$, равно

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{11}$.

10. Действительное число α , которое обращается в цепную дробь $[(1; 3)]$, равно

- 1) $\frac{3+\sqrt{21}}{4}$; 2) $\frac{3-\sqrt{21}}{4}$; 3) $\frac{1-\sqrt{21}}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{21}}{4}$.

11. Действительное число $\sqrt{5}$ представимо цепной дробью

- 1) $[2; 4]$; 2) $[2; 4, 4]$; 3) $[(2; 4)]$; 4) $[2; (4)]$.

Критерии оценки теста:

1. Каждое задание теста оценивается в 1 балл.
2. Итоговая оценка за весь тест соответствует проценту правильных ответов по отношению к общему числу всех вопросов в тесте.
3. Оценка за тест считается положительной, если студент ответил правильно не менее, чем на 60% вопросов теста.

8. *Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:*

Вопросы к зачету (7 семестр)

по теории чисел и числовым системам для студентов 4 курса (7 семестр)

1. Отношение делимости и его простейшие свойства.
2. Деление с остатком (доказать теорему).
3. НОД и его свойства (доказать любые 2 свойства).
4. Алгоритм Евклида (доказать свойства н.о.д., лежащие в основе алгоритма).
5. Взаимно простые числа (доказать необходимое и достаточное условие взаимной простоты двух чисел и необходимое и достаточное условие делимости целого числа на произведение взаимно простых чисел).
6. НОК и его свойства (доказать теорему о взаимосвязи н.о.д. и н.о.к.).
7. Простые числа. Свойства простых чисел (доказать свойство наименьшего простого делителя числа и основную теорему арифметики).
8. Распределение простых чисел в натуральном ряду (доказать теорему о существовании сколь угодно больших промежутков, состоящих только из составных чисел и о бесконечности множества простых чисел в последовательности $\langle 4n + 1 \rangle$).
9. Числовые функции (число и сумма натуральных делителей).
10. Конечные цепные дроби (доказать теорему о единственности представления рационального числа в виде конечной цепной дроби).
11. Подходящие дроби для данной конечной цепной дроби и их свойства (доказательство теоремы о взаимосвязи соседних подходящих дробей).
12. Систематические числа; переход из одной системы счисления в другую; арифметические операции над систематическими числами (доказать теорему о единственности представления числа в виде систематической записи по любому основанию).
13. Отношение сравнения в кольце целых чисел и его свойства (доказать любые два).
14. Классы вычетов по данному модулю. Кольцо классов вычетов по данному модулю (доказать теорему о том, что множество всех классов вычетов по данному модулю образует кольцо).
15. Полная и приведенная системы вычетов и их свойства (доказать любые 2 свойства).
16. Мультипликативная группа классов вычетов, взаимно простых с модулем. Поле классов вычетов по простому модулю. (Доказать теорему о том, что множество классов вычетов взаимно простых с модулем образует мультипликативную группу).
17. Функция Эйлера и ее свойства. (Доказать мультипликативность функции Эйлера).
18. Теоремы Эйлера и Ферма (с доказательством).

19. Сравнения с неизвестной величиной: степень сравнения, решение сравнения, равносильные сравнения. (Доказать теорему о равносильных сравнениях).
20. Сравнения первой степени и их решение (обосновать способ решения с помощью теоремы Эйлера и с помощью подходящих дробей).
21. Системы сравнений. Системы сравнений первой степени. (Доказать достаточное условие разрешимости системы двух сравнений первой степени).
22. Сравнения по простому модулю. (Доказать любое свойство).
23. Сравнения по составному модулю (Доказать теорему о приведении сравнения по составному модулю к системе сравнений по степеням простых чисел, входящим в каноническое разложение модуля).
24. Показатель (порядок) числа и класса вычетов, взаимно простых с модулем. (Доказать любое свойство показателя).
25. Первообразные корни по простому модулю, их свойства и количество.
26. Индексы чисел и классов по простому модулю. Основные свойства индексов (доказать любое).
27. Двучленные сравнения по простому модулю. Понятие о степенных вычетах. Квадратичные вычеты и невычеты.
13. Символ Лежандра и его свойства.
28. Арифметические приложения теории сравнений. Определение длины периода систематической дроби.
29. Признаки делимости. Общий признак делимости Паскаля.
30. Решение неопределенных уравнений первой степени $ax + by = c$ (с помощью алгоритма Евклида, с помощью подходящих дробей, с помощью сравнений).
31. Представление действительных чисел цепными дробями.
32. Алгебраические и трансцендентные числа.

Критерии оценки ответа на зачете:

1. Зачет проводится по билетам, в которые включены по два вопроса из программы.
2. При оценивании ответа учитывается: правильность формулировок; установление взаимосвязи теории и практики; содержательность и аргументированность, полнота и структурная логичность ответа; глубина знаний вопроса.
3. При допущенных ошибках и неточностях в формулировках определений и доказательствах теорем оценка за ответ снижается.
4. Допуск к зачету осуществляется только при выполнении всех видов практических работ. Студент, успешно отчитавшийся (не менее 60 %) по всем формам контроля (коллоквиум по первому разделу, теоретический опрос по 2-му разделу, ИДЗ, контрольная работа по теории делимости, проверочные работы по теории сравнений и цепным дробям, итоговый тест), по его желанию может быть освобожден от экзамена с выставлением оценки по рейтингу.
5. Рейтинговая оценка на зачете может быть улучшена не более, чем на 30%.

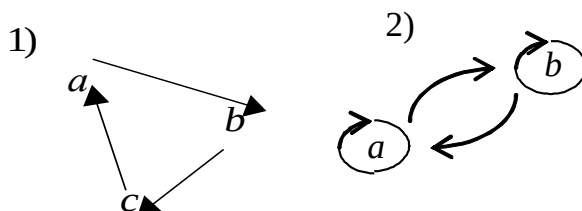
(8 семестр)

Образец варианта контрольного опроса

**по теоретическим основам числовых систем для студентов 4 курса
(входной модуль)**

Вариант 1:

1. Сформулируйте определение бинарного отношения. Приведите примеры.
2. Как определяется множество $Dom\rho$? Приведите примеры бинарных отношений, у которых
 - а) $Dom\rho$ совпадает с областью отправления отношения ρ ;
 - б) $Dom\rho$ не совпадает с областью отправления отношения ρ .
3. Сформулируйте определения и приведите примеры рефлексивного, антисимметричного и транзитивного на множестве отношений.
4. Какими свойствами обладают бинарные отношения, заданные графами:



5. Какими свойствами обладает отношение, заданное на множестве R :
 $x\rho y \Leftrightarrow x > y + 2$
6. Сформулируйте определения и приведите примеры отношений частичного, строгого порядков.
7. Сформулируйте определение и приведите примеры отношения эквивалентности.
8. Сформулируйте определение и приведите примеры фактор-множества множества A по отношению эквивалентности ρ .
9. Как связано отношение эквивалентности, заданное на множестве A с разбиением этого множества?
10. Сформулируйте определение частичного отображения (функционального отношения) множества A в множество B и приведите пример частичного отображения, не являющегося отображением.
11. Сформулируйте определение инъективного отображения $f : A \rightarrow B$.
12. Приведите примеры: а) сюръективного отображения, не являющегося инъективным; б) отображения, не являющегося ни инъективным, ни сюръективным; в) биективного отображения.
13. Пусть дано отображение вида $f : R \rightarrow R$. Как определить по графику, что оно является сюръективным?
14. Какое отображение вида $f : A \rightarrow B$ не имеет обратного? Приведите такой пример.
15. Пусть $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$. Найти $g \circ f$, $Dom(g \circ f)$, $Im(g \circ f)$.
Определить, являются ли $f, g, g \circ f$ инъективными, сюръективными, если

$$A = B = C = R, \quad f(x) = 2^x, \quad g(x) = x^2 + 1$$

16. Сформулируйте определение бинарной алгебраической операции. Приведите примеры.
17. Какая бинарная алгебраическая операция называется коммутативной? Приведите примеры коммутативных бинарных алгебраических операций и бинарных алгебраических операций, не являющихся таковыми.
18. В каком случае говорят, что бинарная алгебраическая операция $\square$ дистрибутивна относительно бинарной алгебраической операции $*$? Приведите примеры.
19. Как определяется нейтральный относительно бинарной алгебраической операции $*$ элемент? Как называется и чему равен нейтральный элемент по сложению? – по умножению?
20. Сформулируйте определения моноида и группы. Приведите примеры группы и моноида, не являющегося группой.
21. Перечислите основные свойства группы.
22. Сформулируйте определение кольца. Приведите пример кольца, не являющегося полем и кольца, являющегося полем.
23. Сформулируйте определение гомоморфизма групп. Приведите пример гомоморфных групп. Сформулируйте утверждение о гомоморфном образе группы.

Критерии оценки контрольного опроса по остаточным знаниям:

1. Каждый вопрос оценивается в 1 балл.
2. Итоговая оценка за весь опрос соответствует проценту правильных ответов по отношению к общему числу всех вопросов.
3. Оценка за опрос считается положительной, если студент ответил правильно не менее, чем на 75% всех вопросов.

10. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Образец индивидуального домашнего задания (8 семестр)

Вариант 1

1. Определите свойства бинарного отношения ρ , заданного на множестве $A = \{a, b, c, d, e\}$:
 $\rho = \{\langle a; a \rangle, \langle b; b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle, \langle e, e \rangle\}$. Ответ поясните.
2. Определите, какими из свойств: 1) рефлексивность; 2) антирефлексивность; 3) симметричность; 4) антисимметричность; 5) транзитивность; 6) связанность — обладает отношение ρ , заданное на множестве действительных чисел R , если $\rho = \{\langle x; y \rangle / x, y \in R, x < y - 1\}$. Ответ поясните.
3. Определите, является ли бинарное отношение f , заданное на множестве действительных чисел R , частичным отображением, отображением (если да, то определите тип отображения): $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
4. Пусть R есть множество действительных чисел. Показать, что $\langle R', * \rangle$ является группой, если: $R' = R \setminus \{-1\}$, $a * b = 2ab + 2b + 2a + 1$.

5. Показать, что отображение f является гомоморфизмом алгебры $\langle R^+, \cdot \rangle$ в алгебру $\langle A, \circ \rangle$ и обосновать, что $\langle A, \circ \rangle$ есть коммутативная группа, если $A = (0;1)$ и $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}, a \circ b = \frac{ab}{1-a-b+2ab}$.
6. Показать, что отображение f является гомоморфизмом алгебры $\langle R, +, \cdot \rangle$ в алгебру $\langle R, *, \circ \rangle$ и обосновать, что $\langle R, *, \circ \rangle$ есть поле, если:
 $f : x \mapsto 2x+1, a \circ b = a+b-1, a * b = \frac{1}{2}(ab-a-b+3)$.

Критерии оценки заданий ИДЗ:

1. Задания № 1-3 оцениваются в 1 балл каждое, задания № 4-6 по 2 балла; максимально возможное число баллов за данное ИДЗ – 9 баллов.
2. При оценивании задания учитывается аккуратность оформления и подробное описание хода решения со ссылками на соответствующий теоретический материал; при допущенных ошибках оценка за задание снижается.
3. Итоговая оценка за всю работу соответствует проценту полученного суммарного балла по отношению к общему числу баллов за все ИДЗ.
4. Оценка за ИДЗ не менее 60% считается положительной. При отрицательной оценке студент выполняет работу над ошибками; рейтинговый балл за повторную работу не может быть больше 75 %.
5. Оценка аннулируется, если на защите ИДЗ (при собеседовании с преподавателем) студент не подтвердил самостоятельность его выполнения.
6. Оценка за ИДЗ снижается при несоблюдении сроков его сдачи: минус 1% за каждый просроченный день.

11. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Образец варианта контрольной работы (8 семестр)

Вариант 1

1. Пусть $\langle A, +, \cdot \rangle$ — коммутативное кольцо с 1 и без делителей нуля, $P = \{ \langle a, b \rangle / a, b \in A, b \neq 0 \}$. Доказать, что отношение $\sim$, определенное в P , является отношением эквивалентности, если $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \Leftrightarrow ad = bc$
2. Построить граф, отвечающий порядку ρ , определенному во множестве A , и в упорядоченном множестве $\langle A, \rho \rangle$ найти минимальные, максимальные, наибольший и наименьший элементы, если они существуют:
 $A = \{a, b, c, d, e, f\};$
 $\rho = \{ \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle a, f \rangle, \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle d, e \rangle, \langle d, f \rangle \}$

3. Даны отображения: $f: x \mapsto \frac{1}{x}$; $g: x \mapsto 0$ множества Q_+ во множество Q . Какие из них сохраняют операцию сложения, умножения? Какие из них являются гомоморфизмом (изоморфизмом) указанных алгебр: $\langle Q_+, + \rangle$ и $\langle Q, + \rangle$; $\langle Q_+, \cdot \rangle$ и $\langle Q, \cdot \rangle$; $\langle Q_+, \cdot \rangle$ и $\langle Q, + \rangle$; $\langle Q_+, + \rangle$ и $\langle Q, \cdot \rangle$?
4. Доказать, что алгебра, $\langle P, \oplus, \otimes \rangle$ - коммутативное полукольцо, если $P = N \times N$, $\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$, $\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle ac + bd, ad + bc \rangle$.

Примечание.

1. Каждое задание данной работы оценивается в 1 балл. Максимально возможное число баллов за работу – 4 балла.
2. Рейтинговая оценка за всю работу соответствует проценту полученного суммарного балла по отношению к общему числу баллов за всю работу.

12. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Программа коллоквиума

для студентов 4 курса (8 семестр, теория чисел и числовые системы)

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. Полукольцо натуральных чисел.
2. Порядок на множестве натуральных чисел. Архимедово и линейно упорядоченное полукольцо натуральных чисел.
3. Определение основных понятий системы натуральных чисел в количественной теории.
4. Формулировка аксиоматической теории целых чисел. Свойства целых чисел.
5. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
6. Формулировка аксиоматической теории рациональных чисел. Свойства рациональных чисел.
7. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.
8. Формулировка аксиоматической теории действительных чисел. Свойства действительных чисел.
9. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
10. Формулировка аксиоматической теории комплексных чисел. Свойства комплексных чисел.
11. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

Критерии оценки ответа на вопросы коллоквиума:

1. Коллоквиум проводится в письменной форме по вопросам из программы коллоквиума
2. При оценивании ответа учитывается: правильность формулировок; установление взаимосвязи теории и практики; содержательность и аргументированность. полнота и структурная логичность доказательства; глубина знаний вопроса. При допущенных ошибках и неточностях оценка за ответ снижается.
3. Ответ оценивается по 100-балльной шкале.
4. Положительной считается оценка не менее 60%. При отрицательной оценке студент пересдает коллоквиум заново (другой билет, и не более 2-х раз).
5. Рейтинговый балл за повторную пересдачу не может быть больше 75 %.

13. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Итоговый тест

по теории чисел и числовым системам (8 семестр)

Дидактические единицы:

1. Элементы теории множеств
2. Бинарные отношения
3. Отображения
4. Алгебраические операции
5. Аксиоматическая теория натуральных чисел
6. Аксиоматическая теория целых чисел
7. Аксиоматическая теория рациональных чисел
8. Аксиоматическая теория действительных чисел
9. Аксиоматическая теория комплексных чисел
10. Алгебры конечного ранга

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Для множеств $A=(1;3) \cup (5;7]$ и $B=[2;8]$ множество $A \cup B$ равно:
1) $[2;8]$; 2) $(1;8]$; 3) $[2;3) \cup (5;8]$; 4) $(1;2] \cup [5;8]$.
2. Для множеств $A=(1;3) \cup (5;7]$ и $B=[2;8]$ множество $A \cap B$ равно:
1) $[2;3) \cup (5;7]$; 2) $(2;3] \cup [5;7]$; 3) $[2;3] \cup (5;8]$; 4) $(1;8]$.
3. Для множеств $A=(1;3) \cup (5;7]$ и $B=[2;8]$ множество $A \setminus B$ равно:
1) $(1;2)$; 2) $(1;2]$; 3) $(7;8]$; 4) $[7;]$.
4. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$. Множеству $A \times B$ принадлежат пары ...
1) $\langle 1,3 \rangle$; 2) $\langle 2,6 \rangle$; 3) $\langle 3,1 \rangle$; 4) $\langle 3,4 \rangle$.
5. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$, $C=\{2,4,8\}$. Элементами множества $A \times B \times C$ являются кортежи ...
1) $\langle 1,2,3,4 \rangle$; 2) $\langle 2,4,6,8 \rangle$; 3) $\langle 1,4,4 \rangle$; 4) $\langle 3,5,4 \rangle$.

6. Установите соответствие между множествами и символами для их обозначения:

- 1) Множество точек координатной плоскости;
- 2) Множество комплексных чисел без нуля;
- 3) Множество точек числовой прямой;
- 4) Множество всех пар, первый элемент которых есть число целое, а второй – натуральное.

а) $\mathbf{R}$; б) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; в) $\mathbf{C} \setminus \{0\}$; г) $\mathbf{R}^2$.

7. Какие из следующих наборов подмножеств множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ составляют разбиение A ?

- 1) $A_1 = \{2, 3\}, A_2 = \{3, 4, 5\}, A_3 = \{1, 6\}$;
- 2) $A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{4\}, A_3 = \{5, 6\}$;
- 3) $A_1 = \{1, 2, 5, 6\}, A_2 = \{3, 4\}$;
- 4) $A_1 = \emptyset, A_2 = \{1, 3, 4\}, A_3 = \{2, 5\}, A_4 = \{6\}$.

8. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2, 3\}\}$;
- 2) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$;
- 3) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$;
- 4) $1 \in \{\{1\}, \{2, 3\}\}$.

2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1. Бинарное отношение ρ задано на множестве действительных чисел:

$$(\forall x, y \in \mathbf{R}) x \rho y \Leftrightarrow |x| - 3 = |y| - 3.$$

Какими свойствами оно обладает?

- 1) Рефлексивность; 2) Антирефлексивность; 3) Симметричность;
- 4) Антисимметричность; 5) Транзитивность; 6) Связность.

2. Установите соответствие между свойством бинарного отношения ρ , заданного на множестве A , и его формулировкой:

- 1) $(\forall a \in A) a \rho a$ —
- 2) $(\forall a \in A) \neg (a \rho a)$ —
- 3) $(\forall a, b \in A) a \rho b \Rightarrow b \rho a$ —
- 4) $(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a$ —

3. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , является эквивалентностью, если оно удовлетворяет условиям:

- 1) $(\forall a \in A) \neg (a \rho a)$;
- 2) $(\forall a, b \in A) a \rho b \Rightarrow b \rho a$;
- 3) $(\forall a, b, c \in A) a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$;
- 4) $(\forall a \in A) a \rho a$;
- 5) $(\forall a, b \in A) a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$;
- 6) $(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a$.

4. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , называется строгим линейным порядком, если выполняются условия:

- 1) $(\forall a \in A) \neg (a \rho a)$;
- 2) $(\forall a, b \in A) a \rho b \Rightarrow b \rho a$;
- 3) $(\forall a, b, c \in A) a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$;
- 4) $(\forall a \in A) a \rho a$;
- 5) $(\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a$.

5. Бинарное отношение ρ , заданное на множестве A , называется нестрогим линейным порядком, если оно удовлетворяет условиям:

- 1) $(\forall a \in A) \neg (a \rho a)$;
- 2) $(\forall a, b \in A) a \rho b \Rightarrow b \rho a$;
- 3) $(\forall a, b, c \in A) a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$;

$$4) (\forall a \in A) a \rho a; \quad 5) (\forall a, b \in A) a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b; \quad 6) (\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a.$$

6. Бинарное отношение ρ , являющееся строгим частичным порядком на множестве A , не удовлетворяет условиям:

$$1) (\forall a \in A) \neg (a \rho a); \quad 2) (\forall a, b \in A) a \rho b \Rightarrow b \rho a; \quad 3) (\forall a, b, c \in A) a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c; \\ 4) (\forall a \in A) a \rho a; \quad 5) (\forall a, b \in A) a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b; \quad 6) (\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a.$$

7. Бинарное отношение ρ , являющееся нестрогим частичным порядком на множестве A , удовлетворяет условиям:

$$1) (\forall a \in A) \neg (a \rho a); \quad 2) (\forall a, b \in A) a \rho b \Rightarrow b \rho a; \quad 3) (\forall a, b, c \in A) a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c; \\ 4) (\forall a \in A) a \rho a; \quad 5) (\forall a, b \in A) a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b; \quad 6) (\forall a, b \in A) a \neq b \Rightarrow a \rho b \vee b \rho a.$$

8. На множестве действительных чисел задано отношение эквивалентности ρ

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x \rho y \Leftrightarrow \cos \frac{\pi x}{2} = \cos \frac{\pi y}{2}$$

Какое из следующих множеств совпадает с классом $[1]_\rho$?

$$1) \{1+2n | n \in \mathbb{Z}\}; \quad 2) \{1+n | n \in \mathbb{Z}\}; \quad 3) \{2+4n | n \in \mathbb{Z}\}; \quad 4) \{-2+2n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

9. Бинарное отношение $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \rho y \Leftrightarrow |x^2 - 2| = |y^2 - 2|$ является эквивалентностью.

Классу $[1]_\rho$ принадлежат числа:

$$1) 1; \quad 2) 2; \quad 3) 3; \quad 4) \sqrt{3}.$$

10. На множестве $\mathbb{N}^2$ бинарное отношение " $\sim$ ", заданное условием $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$, является:

- 1) строгим линейным порядком;
- 2) нестрогим линейным порядком;
- 3) эквивалентностью;
- 4) нестрогим частичным порядком.

11. На множестве $\mathbb{N}^2$ отношение " $\sim$ ", заданное условием $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a + d = b + c$, является эквивалентностью. Класс эквивалентности $\overline{\langle 1, 4 \rangle}$ совпадает с классами

$$1) \overline{\langle 2, 3 \rangle}; \quad 2) \overline{\langle 2, 5 \rangle}; \quad 3) \overline{\langle 6, 9 \rangle}; \quad 4) \overline{\langle 5, 9 \rangle}.$$

3. ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Какие из следующих бинарных отношений на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ являются отображениями $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$?

$$1) \rho = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 = 1\}; \quad 2) \rho = \{\langle x, y \rangle \mid y > x + 1\}; \\ 3) \rho = \{\langle x, y \rangle \mid y = 10^{x^2 - 1}\}; \quad 4) \rho = \{\langle x, y \rangle \mid 2^x = \lg y\}.$$

2. Какие из указанных ниже отображений сюръективны?

1)	2)	3)	4)
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = 2^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \lg(x)$

3. Какие из указанных ниже отображений инъективны?

1)	2)	3)	4)
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x) = 2^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \lg(x)$

4. Какое из указанных ниже отображений обратимо?

1)	2)	3)	4)
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x)=2^x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\lg(x)$

5. Гомоморфное отображение f алгебры $\langle A; * \rangle$ в алгебру $\langle B; \circ \rangle$ должно удовлетворять условию:

1) f сюръективно; 2) f инъективно; 3) $(\forall a, b \in A) f(a*b) = f(a) \circ f(b)$; 4) f – биекция.

6. Изоморфное отображение f алгебры $\langle A; * \rangle$ в алгебру $\langle B; \circ \rangle$ должно удовлетворять условию:

1) f инъективно; 2) f сюръективно; 3) $(\forall a, b \in A) f(a*b) = f(a) \circ f(b)$;

4) $(\forall a, b \in A) f(a)*f(b) = f(b) \circ f(a)$; 5) $(\forall a, b \in A) f(a*b) = f(b*a)$.

7. Гомоморфное отображение f алгебры $\langle A, +, \cdot \rangle$ в алгебру $\langle B, *, \circ \rangle$ должно удовлетворять условиям:

1) f сюръективно; 2) f инъективно;

3) $(\forall a, b \in A) f(a+b) = f(a) * f(b)$; 4) $(\forall a, b \in A) f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$.

8. Отображение $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, такое, что $f: x \mapsto \frac{1}{x+1}$,

1) инъективно; 2) сюръективно; 3) биекция.

9. Отображение f алгебры $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$ в алгебру $\langle \mathbb{Z}; * \rangle$, где $f(x) = x+2$, $a*b = a+b-2$ является

1) только гомоморфизмом; 2) изоморфизмом.

10. Какое из утверждений является неверным?

1) Гомоморфный образ группы является группой.

2) Гомоморфный образ кольца является кольцом.

3) Гомоморфный образ поля является полем.

11. Какие из следующих отображений $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ являются гомоморфизмами $\langle \mathbb{R}; - \rangle$ в $\langle \mathbb{R}; - \rangle$?

1) $f: x \mapsto 2x$; 2) $f: x \mapsto x^2$; 3) $f: x \mapsto 0$; 4) $f: x \mapsto |x|$.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

1. Какие из следующих операций на $\mathbb{R}$ являются коммутативными?

1) $a*b = (a+b)^2$; 2) $a \circ b = a+3b$; 3) $a*b = \frac{ab}{3}$; 4) $a \circ b = \frac{1}{2}(a-b)$.

2. Какая из следующих операций на $\mathbb{R}$ является ассоциативной?

1) $a*b = (a+b)^2$; 2) $a \circ b = a+3b$; 3) $a*b = \frac{ab}{3}$; 4) $a \circ b = \frac{1}{2}(a-b)$.

3. Укажите пары бинарных алгебраических операций, в которых первая операция дистрибутивна относительно второй.

1) Сложение и умножение на множестве $\mathbb{R}$.

2) Умножение и сложение на множестве $\mathbb{R}$.

3) Объединение и пересечение на множестве $\mathcal{P}(U)$ всех подмножеств универсального множества U .

4) Пересечение и объединение на множестве $\mathcal{P}(U)$.

5) Умножение и деление на множестве $\mathbb{R}^+$.

4. Установите соответствие между алгеброй и элементом этой алгебры, который является нейтральным относительно указанной алгебраической операции.

- 1) $\langle \mathbb{Z}; + \rangle$; 2) $\langle \mathbb{Q}; \cdot \rangle$; 3) $\langle \mathcal{P}(U); \cup \rangle$; 4) $\langle \mathcal{P}(U); \cap \rangle$; 5) $\langle \mathbb{N}; + \rangle$.
- 1) 0; 2) 1; 3) $\emptyset$; 4) U ; 5) Основное множество алгебры не содержит нейтрального элемента.

5. Пусть R – множество действительных чисел, бинарная операция $*$ алгебры $\langle R; *, e \rangle$ определяется равенством $a * b = -2a - 2b + 6 + ab$ и $e = 3$ – нейтральный элемент для операции $*$.

Множество всех симметризуемых элементов алгебры равно ...

- 1) $R \setminus \{3\}$; 2) $R \setminus \{2\}$; 3) $R \setminus \{0\}$; 4) R .
6. Пусть R есть множество действительных чисел и операция $*$ алгебры $\langle R; * \rangle$ задана по правилу $a * b = 2a + 2b - 2ab - 1$. Тогда нейтральный элемент e относительно операции $*$ равен ...

- 1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$.

7. Конгруэнцией на множестве $\mathbb{Z}$ относительно операции сложения являются бинарные отношения

- 1) " $\leq$ "; 2) " $=$ "; 3) " $:$ "; 4) " $\equiv$ ".

8. Какие из утверждений являются **неверными** для алгебры $\langle \{a_1, a_2, a_3\}; \circ \rangle$, если операция $\circ$ задана таблицей

$\circ$	a_1	a_2	a_3
a_1	a_3	a_1	a_2
a_2	a_1	a_2	a_3
a_3	a_2	a_3	a_1

- 1) Операция $\circ$ коммутативна.
 2) Нейтральным элементом для операции $\circ$ является элемент a_1 .
 3) Нейтральным элементом для операции $\circ$ является элемент a_2 .
 4) Симметричным элементом для a_1 является a_2 .
 5) Симметричным элементом для a_3 является a_1 .

5. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. В формулировке аксиоматической теории натуральных чисел участвует бинарное отношение ...
 1) «следовать за»; 2) «непосредственно следовать за»; 3) «предшествовать ...».
2. Отношение «непосредственно следовать за» на $\mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:
 1) рефлексивности; 2) симметричности; 3) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a = b \Rightarrow a' = b')$; 4) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a' = b' \Rightarrow a = b)$.
3. Отношение «непосредственно следовать за» на $\mathbb{N}$ не обладает свойствами:
 1) транзитивности; 2) симметричности; 3) связности; 4) $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a = b \Rightarrow a' = b')$.
4. Бинарная операция «сложение» на $\mathbb{N}$ определяется условиями:
 1) $a + b = b + a$; 2) $a + 1 = a'$; 3) $(a + b)' = a + b'$; 4) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
5. На $\mathbb{N}$ элемент, непосредственно следующий за a , обозначается:
 1) $a - 1$; 2) $\tilde{a}$; 3) $a + 1$; 4) a' .
6. Бинарная операция «умножение» на $\mathbb{N}$ определяется условиями:
 1) $a \cdot 1 = a$; 2) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; 3) $a \cdot b' = a \cdot b + a$; 4) $a \cdot b = b \cdot a$.

7. Во множестве $\mathbb{N}$ элемент, который непосредственно не следует ни за каким другим элементом из $\mathbb{N}$, обозначается символом ...
8. Аксиома индукции формулируется так:
- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a' = b' \Rightarrow a = b$.
 - 2) Всякое подмножество M множества $\mathbb{N}$, такое, что $1 \in M$ и $((\forall a \in \mathbb{N})(a \in M \Rightarrow a' \in M))$, совпадает с $\mathbb{N}$.
 - 3) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (\exists! c \in \mathbb{N}) (a + b = c)$.
 - 4) Если утверждение, в формулировке которого есть натуральное число n , справедливо для $n=1$ и из предположения справедливости утверждения для $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) следует справедливость его для $n=k+1$, то утверждение справедливо для всех натуральных чисел.
9. Аксиома Архимеда формулируется так:
- 1) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$;
 - 3) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (\exists c \in \mathbb{N}) b \cdot c > a$;
 - 4) $(\forall a \in \mathbb{N}) (a \neq 1 \Rightarrow ((\exists n \in \mathbb{N}) (a = 1 + n)))$;
10. Алгебра $\langle \mathbb{N}; +, \cdot \rangle$ является ...
- 1) кольцом; 2) полукольцом; 3) полем; 4) телом.
11. Для любых натуральных чисел a, b выполняется одно и только одно из следующих условий: 1) $a = b$; 2) $a = b + n, n \in \mathbb{N}$; 3) $b = a + k, k \in \mathbb{N}$; 4) $a : (a + b)$.
12. Определение отношения «>» на $\mathbb{N}$ формулируется так:
- 1) Натуральное число a больше натурального числа b , если существует такое натуральное число k , что $a = b + k$.
 - 2) Натуральное число a больше натурального числа b , если существует такое натуральное число k , что $b = a + k$.
 - 3) Натуральное число a больше натурального числа b , если существует такое натуральное число k , что $a = b \cdot k$.
13. К законам монотонности сложения относятся:
- 1) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a = b \Rightarrow a + c = b + c)$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$;
 - 3) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$;
 - 4) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow a - c > b - c)$.
14. К законам монотонности умножения относятся:
- 1) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c)$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a = b \Rightarrow a + c = b + c)$;
 - 3) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$;
 - 4) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a > b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c})$;
15. Установите соответствие между равномощными множествами (отрезками натурального ряда).
- | | |
|----------|---------------|
| 1) [1,3] | а) [6,8] |
| 2) [2,6] | и б) [12,16] |
| 3) [1,4] | в) [5,8] |
| 4) [1,8] | г) [101, 108] |
16. Множество, которое либо пусто, либо равномощно некоторому начальному отрезку натурального ряда, называют:

1) конечным; 2) бесконечным; 3) упорядоченным.

17. Аксиоматическая теория натуральных чисел является:

1) формальной; 2) содержательной; 3) категоричной; 4) непротиворечивой.

18. Из следующих утверждений истинными являются:

- 1) Всякое непустое подмножество множества натуральных чисел имеет наименьший элемент.
- 2) Существует непустое подмножество множества натуральных чисел, которое не имеет наименьшего элемента.
- 3) Всякое непустое подмножество множества натуральных чисел имеет наибольший элемент.
- 4) Существует непустое подмножество множества натуральных чисел, которое не имеет наибольшего элемента.

19. Утверждение «любое непустое, ограниченное сверху, подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет наибольший элемент» означает, что система $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ – ...

- 1) упорядоченное множество;
- 2) вполне упорядоченное множество;
- 3) линейно упорядоченное множество;
- 4) архимедово упорядоченное множество.

6. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

1. В список основных объектов формулировки аксиоматической теории целых чисел входят:

- 1) $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
- 2) $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
- 3) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
- 4) 0 – нуль;
- 5) 1 – единица.

2. При построении аксиоматической теории целых чисел исходим из определения (вставьте нужное слово):

Системой целых чисел называется минимальное ...,
которое является расширением системы натуральных чисел.

3. Какое из перечисленных ниже утверждений говорит о том, что сложение на $\mathbb{N}$ является ограничением операции сложения на $\mathbb{Z}$ множеством $\mathbb{N}$ («+» – сложение на $\mathbb{Z}$, а $\oplus$ – сложение на $\mathbb{N}$)?

- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (\exists! c \in \mathbb{N}) (a + b = c)$;
- 2) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (a \oplus b = a + b)$;
- 3) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (a \oplus b = b \oplus a)$;
- 4) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) ((a + b) + c = a + (b + c))$.

4. Какое из перечисленных ниже утверждений говорит о том, что умножение на $\mathbb{N}$ является ограничением операции умножения на $\mathbb{Z}$ множеством $\mathbb{N}$, если « $\cdot$ » – умножение на $\mathbb{Z}$, а $\otimes$ – умножение на $\mathbb{N}$?

- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (\exists! c \in \mathbb{N}) (a \cdot b = c)$;
- 2) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (a \otimes b = a \cdot b)$;
- 3) $(\forall a, b \in \mathbb{N}) (a \otimes b = b \otimes a)$;
- 4) $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) ((a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c))$.

5. Аксиомой минимальности в формулировке аксиоматической теории целых чисел является утверждение:
 - 1) Всякое подмножество M множества целых чисел, такое, что $0 \in M$ и $(\forall a, b \in M) (a-b \in M)$, совпадает с $\mathbb{Z}$.
 - 2) Всякое подмножество M множества целых чисел, такое, что $1 \in M$ и $(\forall a, b \in M) (a+b \in M)$, совпадает с $\mathbb{Z}$.
 - 3) Всякое подмножество M множества целых чисел совпадает с $\mathbb{Z}$, если $(\forall a, b \in M) (a-b \in M)$.
 - 4) Всякое подмножество M множества целых чисел, такое, что $1 \in M$ и $(\forall a, b \in M) (a-b \in M)$, совпадает с $\mathbb{Z}$.
6. Сложение на множестве целых чисел обладает свойствами:
 - 1) коммутативности; 2) ассоциативности;
 - 3) дистрибутивности относительно умножения; 4) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a=b \Rightarrow a+c = b+c)$.
7. Умножение на множестве целых чисел обладает свойствами:
 - 1) коммутативности; 2) ассоциативности;
 - 3) дистрибутивности относительно сложения; 4) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a>b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$.
8. Сложение целых чисел не обладает свойствами:
 - 1) коммутативности; 2) ассоциативности;
 - 3) дистрибутивности относительно умножения; 4) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (a < a+b)$.
9. Умножение на $\mathbb{Z}$ не обладает свойством:
 - 1) коммутативности; 2) ассоциативности;
 - 3) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a>b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$; 4) дистрибутивности относительно сложения.
10. Всякое целое число представимо в виде:
 - 1) суммы двух натуральных чисел;
 - 2) разности двух натуральных чисел;
 - 3) частного двух натуральных чисел;
 - 4) произведения двух натуральных чисел.
11. Отношение «больше» на множестве целых чисел определяется так:
 - 1) $a>b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (a=b+n)$; 2) $a>b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{R}) (a=b \cdot n)$;
 - 3) $a>b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (a=b-n)$; 4) $a>b \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{Z}) (a=b+c)$.
12. Бинарными алгебраическими операциями на $\mathbb{Z}$ являются:
 - 1) сложение; 2) вычитание; 3) умножение; 4) деление.
13. Отношение «>» на $\mathbb{Z}$ обладает свойствами:
 - 1) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a>b \Rightarrow a+c > b+c)$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a>b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$;
 - 3) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a>b \Rightarrow a \cdot n > b \cdot n)$;
 - 4) $(\forall a \in \mathbb{Z}) (a+a>a)$.
14. Линейно упорядоченное множество $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$:
 - 1) дискретно; 2) плотно; 3) непрерывно.
15. В упорядоченном кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел аксиома Архимеда формулируется так:
 - 1) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (\exists n \in \mathbb{N}) (n \cdot a > b)$;
 - 2) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (\exists c \in \mathbb{Z}) (c \cdot a > b)$;
 - 3) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (a>0 \wedge b>0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (n \cdot a > b))$.

16. Аксиоматическая теория целых чисел:

- 1) категорична; 2) не является категоричной; 3) противоречива; 4) непротиворечива; 5) содержательная; 6) формальная.

17. Какие из следующих утверждений истинны?

- 1) Всякое непустое подмножество множества целых чисел имеет наименьший элемент.
- 2) Всякое непустое подмножество множества целых чисел имеет наибольший элемент.
- 3) Существует непустое подмножество множества целых чисел, которое не имеет наименьшего элемента.
- 4) Существует непустое подмножество множества целых чисел, которое не имеет наибольшего элемента.

7. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. В список основных объектов формулировки аксиоматической теории рациональных чисел входят:

- 1) $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел; 2) $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; 3) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; 4) $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

2. При построении аксиоматической теории рациональных чисел исходим из определения:

(вставить нужное слово)

«Системой рациональных чисел называется минимальное ..., которое является расширением системы целых чисел».

3. Аксиоматическая теория рациональных чисел является:

- 1) формальной; 2) содержательной; 3) категоричной; 4) не является категоричной; 5) противоречивой; 6) непротиворечивой.

4. Пусть «+» – сложение на $\mathbb{Q}$, «р» – сложение на $\mathbb{Z}$. Какое из перечисленных ниже утверждений говорит о том, что сложение на $\mathbb{Q}$ является продолжением сложения на $\mathbb{Z}$?

- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (\exists! c \in \mathbb{Z}) (a \text{ р } b = c)$;
- 2) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) a \text{ р } b = a + b$;
- 3) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) a + b = b + a$;
- 4) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) a \text{ р } b = b \text{ р } a$.

5. Пусть «·» – умножение на $\mathbb{Q}$, « $\otimes$ » – умножение на $\mathbb{Z}$. Какое из перечисленных ниже утверждений говорит о том, что умножение на $\mathbb{Q}$ является продолжением умножения на $\mathbb{Z}$?

- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) (\exists! c \in \mathbb{Z}) (a \otimes b = c)$;
- 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$;
- 3) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) a \otimes b = a \cdot b$;
- 4) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}) a \cdot b = b \cdot a$.

6. Аксиомой минимальности в формулировке аксиоматической теории рациональных чисел является утверждение:

- 1) Всякое подмножество M множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, такое, что $\mathbb{Z} \subset M$ и $(\forall a, b \in M) (b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \in M)$, совпадает с $\mathbb{Q}$;
- 2) Всякое подмножество M множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, такое, что $\mathbb{N} \subset M$ и $(\forall a, b \in M) (b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \in M)$, совпадает с $\mathbb{Q}$;

- 3) Всякое подмножество M множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, такое, что $\mathbb{Z} \subset M$ и $(\forall a, b \in M) (a \cdot b \in M)$, совпадает с $\mathbb{Q}$;
- 4) Всякое подмножество M множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, такое, что $\mathbb{Z} \subset M$ и $(\forall a, b \in M) (a - b \in M)$, совпадает с $\mathbb{Q}$.
7. Сложение рациональных чисел обладает свойствами
- 1) коммутативности; 2) ассоциативности; 3) дистрибутивности относительно умножения;
- 4) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (\exists x \in \mathbb{Q}) a + x = b$.
8. Умножение рациональных чисел не обладает свойством:
- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (a \cdot b = b \cdot a)$;
- 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) (a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$;
- 3) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) (a + b) \cdot c = ac + bc$;
- 4) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (a \neq 0 \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Q})$.
9. Всякое рациональное число представимо в виде:
- 1) разности натуральных чисел;
- 2) суммы целых чисел;
- 3) произведения целых чисел;
- 4) частного от деления целого числа на натуральное число.
10. В поле рациональных чисел дробь $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) является положительной, если:
- 1) $m \cdot n > 0$; 2) $m \cdot n < 0$; 3) $m + n > 0$; 4) $m - n > 0$.
11. В архимедовски упорядоченном поле рациональных чисел для любых рациональных чисел a, b, c выполняются свойства:
- 1) $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$; 2) $\neg (a > a)$; 3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$;
- 4) $a > b \Rightarrow b > a$; 5) $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$;
- 6) $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$; 7) $a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a$; 8) $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot b > a)$.
12. Всякое линейно упорядоченное поле содержит подполе, изоморфное полю ...
- 1) рациональных чисел; 2) действительных чисел; 3) комплексных чисел.
13. В линейно упорядоченном поле рациональных чисел аксиома Архимеда формулируется так:
- 1) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (\exists n \in \mathbb{N}) (b \cdot n > a)$;
- 2) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (\exists c \in \mathbb{Z}) (a \cdot c > b)$;
- 3) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (n \cdot a > b))$;
- 4) $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) (a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q}) (c \cdot a > b))$.
14. Множество рациональных чисел: 1) счетно; 2) не является счетным.
15. Линейно упорядоченное множество $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ 1) дискретно; 2) плотно; 3) непрерывно.

8. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. При построении аксиоматической теории действительных чисел по Кантору исходим из определения:
- «Системой действительных чисел называется линейно и архимедовски упорядоченное поле, всякая ____ (вставьте нужное слово) последовательность элементов которого сходится в нем».

2. В список основных объектов аксиоматической теории действительных чисел не входят:
 - 1) $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;
 - 2) $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
 - 3) 0 – нуль; 4) «>» – бинарное отношение на $\mathbb{R}$; 5) -1 .
3. Аксиоматическая теория действительных чисел является:
 - 1) формальной; 2) содержательной; 3) противоречивой; 4) непротиворечивой;
 - 5) категоричной; 6) не является категоричной.
4. Установите соответствие между понятием и его определением.
 - 1) содержательная аксиоматическая теория;
 - 2) непротиворечивая аксиоматическая теория;
 - 3) категоричная аксиоматическая теория;
 - 4) формальная аксиоматическая теория.
 - 1) Система логических правил вывода предполагается известной.
 - 2) Для любого высказывания A теории хотя бы одно из высказываний A или $\neg A$ не является теоремой.
 - 3) Две любые её модели изоморфны.
 - 4) Система логических правил вывода явным образом включается в теорию.
5. Поле действительных чисел является расширением поля рациональных чисел (вставьте нужное слово).
6. Полнота системы действительных чисел означает, что ...
 - 1) В поле действительных чисел существует корень любой натуральной степени из положительного действительного числа;
 - 2) Любая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится в поле действительных чисел;
 - 3) Любая последовательность поля действительных чисел имеет эквивалентную ей последовательность рациональных чисел.
7. Всякое действительное число есть ...
 - 1) предел последовательности рациональных чисел;
 - 2) частное двух рациональных чисел;
 - 3) десятичная дробь (конечная или бесконечная).
8. Умножение действительных чисел обладает свойствами:
 - 1) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (a \cdot b = b \cdot a)$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) (a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c)$;
 - 3) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) ((a + b) + c = a + (b + c))$;
 - 4) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}) (b \neq 0 \wedge d \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd})$.
9. Линейность порядка в системе $\langle \mathbb{R}, > \rangle$ является следствием свойства:
 - 1) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) (a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c)$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) (a > b \Rightarrow a + c > b + c)$;
 - 3) $(\forall a \in \mathbb{R}) \neg(a > a)$;
 - 4) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (a \neq b \Rightarrow a > b \vee b > a)$.
10. Линейно упорядоченное множество действительных чисел $\langle \mathbb{R}, > \rangle$:
 - 1) дискретно; 2) плотно; 3) непрерывно.
11. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является:

1) счётным; 2) несчётным; 3) множеством мощности континуум.

9. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

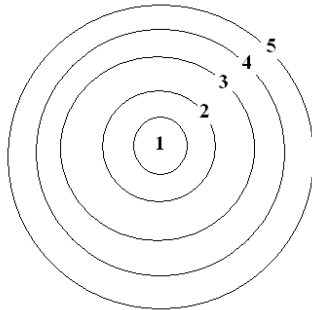
1. В список первичных терминов аксиоматической теории комплексных чисел **не входит**:
 - 1) $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;
 - 2) «+» и « $\cdot$ » – бинарные операции на множестве комплексных чисел;
 - 3) $\mathbb{Z}$ – **множество целых чисел**;
 - 4) $0, 1, i$ – элементы.
 - 5) $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.
2. При построении аксиоматической теории комплексных чисел исходим из определения:
Под системой комплексных чисел понимают минимальное поле, которое является расширением поля _____ (вставьте нужное слово) чисел и в котором есть элемент i с условием $i^2 = -1$.
3. Аксиоматическая теория комплексных чисел не является:
 - 1) содержательной; 2) формальной; 3) категоричной; 4) некатегоричной;
 - 5) противоречивой; 6) непротиворечивой.
4. Для любого комплексного числа a :
 - 1) существует противоположное ему число $-a$;
 - 2) существует обратное ему число $\frac{1}{a}$;
 - 3) $a^2 > 0$.
5. Всякое комплексное число представимо в виде:
 - 1) $a+bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;
 - 2) десятичной дроби;
 - 3) bi , $b \in \mathbb{R}$;
 - 4) $a-bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.
6. Аксиома минимальности в формулировке аксиоматической теории комплексных чисел имеет вид:
 - 1) поле комплексных чисел алгебраически замкнуто;
 - 2) любая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится в поле комплексных чисел;
 - 3) любое подмножество M множества $\mathbb{C}$ совпадает с $\mathbb{C}$, если оно удовлетворяет условиям: $\mathbb{R} \subset M$; $i \in M$; $(\forall a, b \in M) a+b \in M$; $(\forall a, b \in M) a \cdot b \in M$;
 - 4) любой многочлен положительной степени над полем комплексных чисел можно разложить в произведение многочленов первой степени с комплексными коэффициентами.
7. Пусть «+» – сложение на $\mathbb{C}$, « $\oplus$ » – сложение на $\mathbb{R}$. Какое из приведённых ниже утверждений говорит о том, что сложение на $\mathbb{R}$ является продолжением сложения на $\mathbb{C}$.
 - 1) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a+b=b+a$;
 - 2) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a \oplus b = a+b$;
 - 3) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
 - 4) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (\exists! c \in \mathbb{R}) a \oplus b = c$.
8. Пусть « $\cdot$ » – умножение на $\mathbb{C}$, « $\otimes$ » – умножение на $\mathbb{R}$. Какое из перечисленных ниже утверждений говорит о том, что умножение на $\mathbb{R}$ является ограничением умножения на $\mathbb{C}$ множеством $\mathbb{R}$?
 - 1) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) (\exists! c \in \mathbb{R}) a \otimes b = c$;
 - 2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
 - 3) $(\forall a, b \in \mathbb{R}) a \otimes b = a \cdot b$;

4) $(\forall a, b \in \mathbb{C}) a \cdot b = b \cdot a$.

9. Можно ли упорядочить поле комплексных чисел?

1) да; 2) нет.

10. Установите соответствие между числовыми множествами и их графической интерпретацией с помощью кругов Эйлера.



– $\mathbb{C}$
– $\mathbb{Q}$
– $\mathbb{Z}$
– $\mathbb{N}$
– $\mathbb{R}$

10. АЛГЕБРЫ КОНЕЧНОГО РАНГА

1. В линейной алгебре $\langle A, +, \cdot, \{\omega_\lambda | \lambda \in F\} \rangle$ над полем F бинарные операции $+$, $\cdot$ и унарные операции ω_λ умножения элементов из A на скаляры λ поля F удовлетворяют требованиям:

- 1) $\langle A, +, \cdot \rangle$ – кольцо (не обязательно ассоциативное);
- 2) $\langle A, +, \cdot \rangle$ – тело;
- 3) $\langle A, +, \cdot \rangle$ – поле;
- 4) $\langle A, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in F\} \rangle$ – векторное пространство над полем F ;
- 5) $(\forall a, b \in A) (\forall \lambda \in F) \lambda(a \cdot b) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

2. Линейную алгебру над полем R относительно бинарных операций $+$, $\cdot$ и унарных операций ω_λ умножения на скаляры λ из поля R образуют множества:

- 1) $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел;
- 2) $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел;
- 3) $R^{n \times n}$ – множество всех $n \times n$ -матриц над полем R ;
- 4) $R^{m \times n}$ – множество всех $m \times n$ -матриц над полем R ($m \neq n$);
- 5) $\text{Hom}(V; V)$ – всех линейных операторов векторного пространства $V(R)$.

3. Рангом линейной алгебры $\langle A, +, \cdot, \{\omega_\lambda | \lambda \in F\} \rangle$ называется:

- 1) характеристика кольца $\langle A, +, \cdot \rangle$;
- 2) число её основных операций;
- 3) размерность векторного пространства $\langle A, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in F\} \rangle$.

4. Установите соответствие между линейной алгеброй и её рангом.

- | | |
|---|----------|
| 1) $\langle F, +, \cdot, \{\omega_\lambda \lambda \in F\} \rangle$, где F – произвольное поле; | а) 4 |
| 2) $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, \{\omega_\lambda \lambda \in \mathbb{R}\} \rangle$, где $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел; | б) 8 |
| 3) $\langle F^{n \times n}, +, \cdot, \{\omega_\lambda \lambda \in F\} \rangle$, где $F^{n \times n}$ – множество $n \times n$ -матриц над полем F ; | в) n^2 |
| 4) $\langle \mathbb{H}, +, \cdot, \{\omega_\lambda \lambda \in \mathbb{R}\} \rangle$ – алгебра кватернионов над полем $\mathbb{R}$; | г) 2 |
| 5) $\langle \mathbb{O}, +, \cdot, \{\omega_\lambda \lambda \in \mathbb{R}\} \rangle$ – алгебра чисел Кэли (октонионов) над $\mathbb{R}$. | д) 1 |

5. Для линейной алгебры $\langle \mathbb{H}, +, \cdot, \{\omega_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\} \rangle$ кватернионов над полем $\mathbb{R}$ справедливы утверждения:

- 1) алгебра $\langle \mathbb{H}, +, \cdot \rangle$ является кольцом;

- 2) алгебра $\langle H, +, \cdot \rangle$ является неассоциативным телом;
 - 3) алгебра $\langle H, +, \cdot \rangle$ является некоммутативным телом;
 - 4) алгебра $\langle H, +, \cdot \rangle$ является полем;
 - 5) алгебра $\langle H, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\} \rangle$ является векторным пространством над полем R .
6. Для линейной алгебры $\langle O, +, \cdot, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\} \rangle$ чисел Кэли (октонионов) над полем R следующее утверждение является ложным:
- 1) данная алгебра является алгеброй с делением над полем R ;
 - 2) $\langle O, +, \cdot \rangle$ – ассоциативное кольцо;
 - 3) $\langle O, +, \cdot \rangle$ – альтернативное кольцо;
 - 4) $\langle O, +, \{\omega_\lambda | \lambda \in R\} \rangle$ – векторное пространство над полем R .
7. Конечномерная ассоциативная линейная алгебра A с делением над полем R может иметь ранг:
- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 8.
8. Конечномерная альтернативная линейная алгебра A с делением над полем R не может иметь ранг:
- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 8.

Примечание. Критерии оценивания теста аналогичны сформулированным выше в программе для теста 4 семестра.

14. Типовое контрольное задание на этапе формирования ПК-1:

Программа экзамена

по теории чисел и числовым системам для студентов 4 курса (8 семестр)

1. Формальные и неформальные (содержательные) аксиоматические теории. Формулировка аксиоматической теории. Свойства аксиоматической теории: непротиворечивость, категоричность, полнота, независимость аксиом в данной теории.
2. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
3. Полукольцо натуральных чисел.
4. Порядок на множестве натуральных чисел. Основные свойства линейно упорядоченного множества натуральных чисел. Вполне упорядоченное множество натуральных чисел.
5. Порядок на множестве натуральных чисел. Архимедово и линейно упорядоченное полукольцо натуральных чисел.
6. Конечные множества. Основное свойство конечного множества. Бесконечность множества натуральных чисел.
7. Определение основных понятий системы натуральных чисел в количественной теории.

8. Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Проблема непротиворечивости арифметики.
9. Независимость аксиомы индукции и ее роль в построении арифметики натуральных чисел.
10. Упорядоченная группа. Линейно упорядоченное кольцо. Критерий порядка в кольце.
11. Формулировка аксиоматической теории целых чисел. Свойства целых чисел.
12. Категоричность аксиоматической теории целых чисел.
13. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
14. Формулировка аксиоматической теории рациональных чисел. Свойства рациональных чисел.
15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.
16. Категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
17. Формулировка аксиоматической теории действительных чисел. Свойства действительных чисел.
18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
19. Формулировка аксиоматической теории комплексных чисел. Свойства комплексных чисел.
20. Категоричность аксиоматической теории комплексных чисел.
21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.
22. Алгебры конечного ранга. Алгебра кватернионов. Теорема Фробениуса.

Критерии оценки ответа на экзамене:

1. Студенты, набравшие по рейтингу не менее 60%, получают оценку «зачтено».
2. К зачету допускаются студенты, отчитавшиеся по контрольному опросу по теоретическим основам числовых систем и ИДЗ не менее, чем на 60 % по каждой из перечисленных форм.
3. Зачет для студентов, имеющих рейтинговый балл ниже 60%, проводится в 2 этапа:
 I. Теоретическая часть: в форме теоретического опроса по формулировкам содержательных аксиоматических теорий классических числовых систем (натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел).
 II. Итоговый тест по материалу 7-8 го разделов дисциплины (9 семестр).

Уровни сформированности компетенции ПК-1 в рамках дисциплины: 7 семестр:

Уровни сформированности компетенции ПК-1	Основные признаки уровня
Пороговый	При выполнении заданий всех форм контроля студент демонстрирует знание: - определений понятий и фактов теории делимости, изучаемых в школьном курсе математики;

	- определение отношения сравнения целых чисел и его простейшие свойства; - определений конечных и бесконечных цепных дробей; проявляет умение: - применять имеющиеся знания по теории делимости к решению школьных задач на делимость; - представлять числа систематической записью по любому основанию, переходить от одной системы счисления к другой, выполнять операции над числами в любой позиционной системе счисления; - сравнивать целые числа по любому модулю, выполнять операции сложения и умножения в кольцах классов вычетов по любому модулю, находить значение функции Эйлера для любого натурального числа; - представлять действительные числа цепными дробями. По итогам балльно-рейтинговой системы сумма рейтинговых баллов студента составляет от 60 до 70 баллов
Базовый	При выполнении заданий всех форм контроля студент демонстрирует знание: - определений основных понятий и фактов теории делимости в кольце целых чисел; - определений основных понятий и фактов теории сравнений в кольце целых чисел; - определений основных понятий теории конечных и бесконечных цепных дробей; проявляет умение: - применять имеющиеся знания по теории делимости к решению школьных задач на делимость; - решать по образцу типовые задачи на арифметические приложения теории сравнений и теории цепных дробей, возможно допуская при этом некоторые неточности; показывает владение: - навыками решения основных типовых теоретико-числовых задач. По итогам балльно-рейтинговой системы сумма рейтинговых баллов студента составляет от 70 до 80 баллов
Повышенный	При выполнении заданий всех форм контроля студент демонстрирует знание: - основ теории делимости, теории сравнений в кольце целых чисел, теории конечных и бесконечных цепных дробей; - основополагающие факты теории чисел, положенные в основу построения модулярной арифметики, составляющей фундамент компьютерной алгебры и теории защиты информации;

	проявляет умение: - использовать основные факты теории делимости (свойства отношения делимости, свойства простых и взаимно простых чисел) при решении задач на делимость; - использовать основные факты теории сравнений и аппарат цепных дробей в их арифметических приложениях; показывает владение: - навыками применения полученных знаний и умений в различных ситуациях (в пределах изученной тематики курса); - представлениями о связи теории чисел со школьным курсом математики. По итогам балльно-рейтинговой системы сумма рейтинговых баллов студента составляет от 80 до 100 баллов.
--	---

9 семестр

Уровни сформированности компетенции ПК-1	Основные признаки уровня
Пороговый	При выполнении заданий всех форм контроля студент демонстрирует знание: - свойств чисел и операций над ними в классических числовых системах (натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел); проявляет умение: - формулировать содержательные аксиоматические теории классических числовых систем перечислением первичных понятий (терминов) и аксиом, возможно допуская при этом ошибки не принципиального характера. По итогам балльно-рейтинговой системы сумма рейтинговых баллов студента составляет от 60 до 70 баллов
Базовый	При выполнении заданий всех форм контроля студент демонстрирует знание: - основ аксиоматического метода в математике на примере построения содержательных аксиоматических теорий классических числовых систем; - свойств чисел и операций над ними в классических числовых системах (натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел); проявляет умение: - формулировать содержательные аксиоматические теории классических числовых систем перечислением первичных понятий (терминов) и аксиом, возможно допуская при этом, некоторые

	неточности; показывает владение: - представлениями о связи дисциплины со школьным курсом математики. По итогам балльно-рейтинговой системы сумма рейтинговых баллов студента составляет от 70 до 80 баллов
Повышенный	При выполнении заданий всех форм контроля студент демонстрирует знание: - сущности аксиоматического метода в математике - свойств содержательных аксиоматических теорий, построенных для классических числовых систем (непротиворечивость, категоричность, неполнота); - свойств чисел и операций над ними в классических числовых системах (натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел); проявляет умение: - формулировать содержательные аксиоматические теории классических числовых систем; - доказывать свойства (непротиворечивость, категоричность) содержательных аксиоматических теорий, построенных для классических числовых систем; - доказывать основные свойства чисел и операций над ними в каждой из классических числовых систем; - демонстрировать естественные связи дисциплины со школьным курсом математики; показывает владение: - аксиоматическим методом; - представлениями о связи дисциплины со школьным курсом математики. По итогам балльно-рейтинговой системы сумма рейтинговых баллов студента составляет от 80 до 100 баллов

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания

Целью промежуточной аттестации по данной дисциплине является оценка уровня сформированности компетенций в результате усвоения знаний, приобретения умений, навыков и опыта деятельности в рамках освоения дисциплины (модуля).

Процедура оценивания охватывает обучающихся, осваивавших дисциплину (модуль). Процедура оценивания проводится по окончании освоения дисциплины (модуля). Оценка уровня сформированности компетенций на этапах их формирования определяется на основании собеседования, включающих теоретические вопросы или задания, в которых обучающемуся предлагают осмыслить реальную профессионально-ориентированную ситуацию, необходимую для решения данной проблемы; при этом актуализируется определенный комплекс знаний, необходимый для разрешения данной проблемы. Оценивание ответов обучающихся проводится в соответствии с приведенными критериями.

На основании ответов (ответов на тест, выполнение практико-ориентированного задания) оценивается уровень сформированности компетенций на этапах их формирования в рамках дисциплины (модуля), а также уровень знаний, умений, навыков и опыта деятельности, по результатам выставляется оценка. Результаты проведения процедуры в установленном порядке проставляются преподавателем в зачетные книжки обучающихся и электронные ведомости. По результатам проведения процедуры оценивания преподавателем делается вывод о результатах промежуточной аттестации по дисциплине.

Процедура оценивания (зачет, экзамен) соответствует действующим в вузе текущим положениям, включая Положение о рейтинговой системе текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов.